FONDO PIZZOFALCONE

26933
BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio XIII
Palchetto
Num.° d' ordine

8 9. 28.

NAZIONALE
B. Prov.
I
1504
NAPOLI
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III

B Prov.
I
1504

# RECUEIL
DE
DIVERSES PROPOSITIONS
# DE GÉOMÉTRIE,
PRÉCÉDÉ
D'UN PRÉCIS DU LEVÉ DES PLANS.

R. ISTITUTO D'INCORAGG.
NAPOLI
BIBLIOTECA M. RISPOLI

« Telle est la fécondité de l'analyse, qu'il suffit de traduire dans « cette langue universelle, les vérités particulières, pour voir sortir « de leurs seules expressions, une foule de vérités nouvelles et inat- « tendues. »

LAPLACE, *Exp. du syst. du monde*, 3e. édit., p. 383.

A PARIS,

De la Librairie de J. KLOSTERMANN Fils, Acquéreur du Fonds de madame veuve BERNARD, Libraire des Écoles impériales Polytechnique, et des Ponts-et-Chaussées, Éditeur des Annales de Chimie, rue du Jardinet, n°. 13, quartier Saint-André-des-Arcs.

*Et à Saint-Pétersbourg*,

Chez KLOSTERMANN Père et Fils.

607:C93

# RECUEIL

## DE DIVERSES PROPOSITIONS

# DE GÉOMÉTRIE,

RÉSOLUES OU DÉMONTRÉES PAR L'ANALYSE ALGÉBRIQUE;

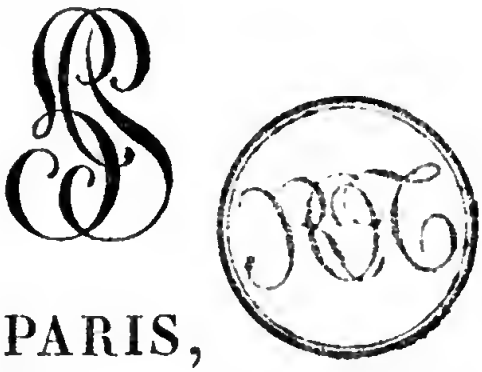
PRÉCÉDÉ D'UN PRÉCIS DU LEVÉ DES PLANS;

PAR L. PUISSANT.

Chef de bataillon au corps impérial des Ingénieurs-Géographes, ci-devant Professeur à l'Ecole impériale militaire, et Membre de la Société littéraire d'Agen.

SECONDE ÉDITION,

CONSIDÉRABLEMENT AUGMENTÉE.



PARIS,

Mad. Ve. BERNARD, Libraire de l'École impériale polytechnique, quai des Augustins, no. 25.

M. DCCC. IX.

IMPRIMERIE DE H. L. PERRONNEAU.

# A M. LAPLACE.

*Chancelier du Sénat-conservateur, Grand-Officier de la Légion d'honneur, Membre de l'Institut et du Bureau des longitudes de France; des Sociétés royales de Londres et de Gottingue; des Académies des sciences de Russie, de Danemarck, d'Italie, etc.*

Monsieur,

Les immenses progrès que vos écrits ont fait faire aux sciences mathématiques et physiques, et plus particulièrement, les savantes leçons que vous avez données à l'Ecole normale, avaient fait connaître l'imperfection et l'insuffisance des élémens de ces sciences, et avaient fait sentir la néccssité de leur

donner une nouvelle forme, d'y introduire et coordonner quelques-unes des sublimes théories qui sont l'objet de vos grandes découvertes, et de celles de vos illustres contemporains. Aussi plusieurs géomètres très-distingués ont-ils rempli, avec un succès complet, cette tâche longue et difficile; et l'une des branches des mathématiques élémentaires qu'ils ont perfectionnées le plus, est celle à laquelle on a donné le nom d'*Application de l'algèbre à la géométrie*. Quoique l'ouvrage que je publie sur cette matière, soit fort imparfait, j'ose cependant, Monsieur, vous en adresser l'hommage. Les encouragemens que reçoivent de vous ceux qui professent ou cultivent les sciences, et la bienveillance particulière dont vous m'avez honoré, sont les motifs qui m'engagent à vous offrir cette faible marque de ma vive reconnaissance. Si ce Recueil de propositions de géométrie peut mériter votre suffrage, et contribuer à inspirer aux élèves cet ardent amour de l'étude sans lequel le génie même ne parviendrait point à la gloire, mon ambition sera entièrement satisfaite.

Salut et respect.

L. PUISSANT.

# AVANT-PROPOS.

Quoique les géomètres, qui écrivent sur les élémens des sciences exactes, se bornent souvent à en exposer les principes, on ne doit pas inférer de là qu'ils regardent comme peu utiles au développement de l'intelligence des élèves les traités spécialement consacrés aux applications. L'expérience prouve, au contraire, que rien n'est plus propre à éclaircir un sujet abstrait, que de s'exercer à analyser des questions qui s'y rapportent. Telle est la raison pour laquelle j'avais pensé, à l'époque où M. Lacroix publia la première édition de son excellent *Traité d'application de l'algèbre à la géométrie*, que les jeunes mathématiciens, et même les professeurs, me sauraient gré d'avoir recueilli diverses propositions de géométrie, dont les solutions ou les démonstrations dépendent immédiatement des principes exposés dans cet ouvrage, suivant les idées lumineuses de MM. Lagrange et Monge. Alors, je m'étais borné à considérer les propositions relatives

à la géométrie aux deux dimensions ; mais aujourd'hui cette branche des mathématiques est cultivée avec tant de succès, qu'il m'a paru convenable de refondre mon premier travail et d'y ajouter diverses questions de géométrie de l'espace. On trouvera, par exemple, dans ce Recueil, quelques propriétés nouvelles de la projection orthogonale, découvertes par M. Poisson, et dont la mécanique peut tirer de grands avantages ; plusieurs théorêmes remarquables sur les polygones et les polyèdres, extraits tant de la *Géométrie de position*, de M. Carnot, que de la *Polyédrométrie*, de M. Lhuilier de Genève, et qui pourraient servir de base à l'étude de la cristallographie mathématique ; une exposition abrégée de la Méthode de la transformation des coordonnées obliques, par M. Lefrançais, capitaine au corps impérial du Génie ; et la solution d'un problème relatif aux ombres. On y trouvera, en outre, en faveur de ceux qui connaissent les principes du calcul différentiel, un abrégé de la belle Théorie des osculations, d'après M. Lagrange, appliquée à la recherche des équations de quelques-unes des surfaces courbes traitées si élégamment dans la Géométrie analytique de M. Monge ; les démonstrations de plusieurs formules em-

ployées dans les hautes mathématiques ; enfin les solutions de plusieurs problèmes curieux *de maximis et minimis*.

Dans la vue de ne pas m'écarter de mes illustres modèles, j'ai eu soin de ne jamais échaffauder mes calculs sur des constructions géométriques qui ne dérivent pas essentiellement de la nature des propositions, afin de faire mieux ressortir les avantages de l'algèbre ; et c'est de quoi l'on s'assurera en comparant le procédé uniforme que j'emploie avec les méthodes mixtes dont on a fait usage depuis Descartes jusqu'à nous, dans la résolution de la plupart des questions de géométrie. Il est vrai, cependant, que, parmi les problèmes qui font l'objet de mon travail, il en est quelques-uns qui ne sont pas par eux-mêmes d'une grande utilité ; mais comme ceux-ci ne peuvent manquer de piquer la curiosité du lecteur, à cause de la célébrité qu'ils ont eue autrefois, ou parce qu'ils sont peu connus, ou parce que l'analyse s'y applique avec élégance, je n'ai point hésité à les publier.

J'ai pensé que l'on trouverait encore ici, avec plaisir, un supplément aux traités élémentaires de trigonométrie, relatif à l'application de cette science au levé des plans,

et c'est ce qui m'a déterminé à donner, avant tout, un précis des méthodes les plus usuelles et les plus simples de la topographie; précis que j'ai principalement lié à la Géométrie et à la Trigonométrie de M. Legendre, et qui sert, en quelque sorte, d'introduction à mes Traités de géodésie théorique et pratique.

Pour donner au présent Ouvrage toute l'étendue qu'il comporte, il m'eût été impossible de tirer tout de mon propre fonds; aussi ai-je, comme l'on voit, puisé dans les meilleures sources, et tâché d'offrir, aux jeunes analystes, des applications variées et intéressantes de la nouvelle méthode de traiter les propositions de géométrie, afin de les mettre sur la voie de faire eux-mêmes des recherches utiles en ce genre.

# TABLE DES MATIÈRES.

## PREMIÈRE SECTION.


Pag.

CHAPITRE PREMIER. *Notions préliminaires.* . . . . . 1

Objet des opérations géodésiques, et formation du canevas d'un plan . . . . . *ib.*

*Description du graphomètre* . . . . . 2

*Description du petit cercle répétiteur.* . . . . . 4

*Mesure des angles avec le graphomètre* . . . . . 5

*Mesure des angles avec le cercle répétiteur* . . . . . 6

CHAP. II. *De la réduction des angles au centre de la station* . . . . . 10

*Centres visibles et accessibles.* . . . . . *ib.*

*Centres invisibles des tours à bases circulaires* . . . . . 14

*Centres invisibles des tours à bases polygonales.* . . . . 16

CHAP. III. *De la réduction des angles à l'horison.* . . . . . 18

Correction à faire aux trois angles d'un triangle, lorsqu'ils sont réduits à l'horison . . . . . 21

CHAP. IV. *De la détermination des distances et de leur orientation.* . . . . . 22

*Mesure des bases* . . . . . *ib.*

Pag.

Réduction d'une base, à l'horison, . . . . . 23
et au niveau de la mer. . . . . 24

*Orientation des plans* . . . . . 25

*Calculs des côtés des triangles.* . . . . . 27

Calcul de l'excès sphérique. . . . . 29

Manière abrégée de former le canevas trigonométrique d'un plan. . . . . 30

*Calcul des distances à la méridienne et à sa perpendiculaire.* . . . . . 31

CHAP. V. *Exposition des méthodes géométriques employées pour déterminer les différences de niveau*; ou Principes du nivellement trigonométrique . . . . . 34

Ce qu'il faudrait faire si l'on voulait avoir égard à la réfraction, dans le calcul des différences de niveau . . . . . 43

CHAP. VI. *Opérations de détail* . . . 44

On indique diverses méthodes pour cet objet.

CHAP. VII. *Evaluations des surfaces agraires.* . . . . . 47

*Problèmes fondamentaux* . . . . . *ib.*

*Mesure des figures régulières* . . . . . 51

*Mesure des polygones irréguliers.* . . . . . 54

Pag.

## SECONDE SECTION.

### GÉOMÉTRIE AUX DEUX DIMENSIONS.

CHAPITRE PREMIER. *De la polygonométrie* . . . . . 61

On fait connaître diverses relations remarquables, soit seulement entre les angles et les côtés de ces figures, soit tout-à-la-fois entre leurs aires, leurs côtés et leurs angles.

*Idée de la résolution des polygones* . . . . . 67

CHAP. II. *Notions préliminaires sur l'application de l'algèbre à la géométrie* . . 71

*Equation de la ligne droite, et conséquences qui en résultent.* . . . . . *ib.*

Formules nouvelles déduites des équations des droites rapportées à des coordonnées obliques. 75

*Transformation des coordonnées* . . . . . 79

*Des différentes formes que prennent les équations des courbes du second degré, eu égard aux axes des coordonnées auxquels ces lignes peuvent être rapportées.* . . . . . 81

*Méthode générale pour mener les tangentes aux courbes.* . . . . . 84

CHAP. III. *Des problèmes déterminés, et de quelques théorèmes de géométrie* . . 89

Problèmes et théorèmes concernant les triangles rectilignes . . . . . 89—99

Pag.

Théorêmes sur les quadrilatères inscriptibles et non inscriptibles. . . . . 99 — 106

Détermination des surfaces suivant certaines conditions. . . . . 106 — 118

Mener des tangentes et des sécantes à des cercles, suivant certaines conditions. . . . . 111 — 119

Théorêmes sur les courbes du second degré. 119 — 124

Problême du second degré, où il s'agit de tracer un cercle qui touche les côtés d'un angle et un cercle donné . . . . . 124

Division d'un trapèze en deux parties équivalentes. *ib.*

Division du triangle scalène en quatre parties équivalentes, par deux droites perpendiculaires entre elles. . . . . 128

Propriétés des tangentes menées à trois cercles donnés de grandeur et de position. . . . . 131

Théorême nouveau déduit de l'analyse employée pour démontrer ces propriétés. . . . . 137

Autre propriété des tangentes à une courbe du second ordre, menées par les extrémités des cordes qui se coupent toutes au même point. 138

Problême extrait des œuvres de Descartes, et dont la solution dépend d'une équation du sixième degré. . . . . 143

Problême sur la lumière réfractée, tiré de l'*Arithmétique universelle* de Newton . . . . . 147

Problême dont la solution dépend d'une équation du quatrième degré . . . . . 148

Démonstration du théorême de Cotes . . . . . 154

CHAP. IV. *Des problêmes indéterminés.* 158

Pag.
Mener des droites, suivant certaines conditions. . . . . 158 — 167
Propriété singulière du centre des *moyennes distances*. . . . . 165
Problèmes sur les contacts, et dont les solutions dépendent de la parabole . . . . . 167 — 170
Problèmes relatifs au cercle. . . . . 170 — 174
Manière de tracer une parabole par des intersections de lignes droites. . . . . 174
Problème extrait de l'*Arithmétique universelle*, et dont les solutions dépendent d'une hyperbole équilatère . . . . . 177
Autres problèmes sur les contacts. . . . 181 — 188
Solutions d'un problème données par une hyperbole. . . . . 189
Problème dont les solutions dépendent de l'une des courbes du second degré. . . . . 193
Inscription d'une ellipse dans un triangle. . . . 195
Description d'une courbe du second ordre, d'après certaines conditions. . . . . 198
Détermination des axes d'une ellipse, étant donnés les diamètres conjugués et l'angle qu'ils font entre eux. . . . . 201
Equation de la conchoïde de Nicomède. . . . . 204
Résolution du problème de deux moyennes proportionnelles . . . . . 206
Equation de la cissoïde de Dioclès. . . . . 207
Solution générale d'un problème, de laquelle dérive toute la théorie du *pantographe*. . . . 208
Moyen fort simple de décrire une ellipse par un mouvement continu . . . . . 212

Pag.

Faire passer une courbe parabolique par plusieurs points donnés. . . . . 214

Solution de ce problême, par M. Lagrange, et qui comprend la méthode d'interpolation. 218–219

## TROISIÈME SECTION.

### GÉOMÉTRIE AUX TROIS DIMENSIONS.

CHAPITRE PREMIER. *De la polyédrométrie* . . . . . 220

On fait connaître diverses relations remarquables entre les angles et les faces des polyèdres.

CHAP. II. *Des équations du point, de la droite et du plan, considérés dans l'espace; et de quelques propriétés nouvelles des projections.* . . . . . 227

Relations entre les cosinus des angles que trois plans rectangulaires font avec les plans coordonnés . . . . . 235

Nouveaux théorêmes de M. Poisson, sur les projections orthogonales des aires . . . 237 — 240

Leur usage en mécanique. . . . . 240

Formules de M. Lefrançais, relatives à la ligne droite et au plan, rapportés au même systême de coordonnées obliques. . . . . 241 — 244

CHAP. III. *Transformation des coordonnées* . . . . . 245

Pag.

On donne de nouvelles démonstrations des formules relatives à cet objet.

Relation entre les cosinus des angles que trois droites rectangulaires font avec les axes des coordonnées . . . . . 250 — 251

CHAP. IV. *Discussion abrégée des surfaces du second ordre* . . . . . 258

Courbes douées d'un centre. . . . . 265 — 268

Courbes privées de centre. . . . . 269 — 270

CHAP. V. *De la recherche de l'équation d'une surface du second ordre, d'après la loi connue de sa description.* 271

*Solution relative aux surfaces cylindriques* . . . . . *ib.*

*Solution relative aux surfaces coniques* . . . . . 275

*Solution relative aux surfaces de révolution* . . . . . 278

*Solution relative à la surface engendrée par une droite mobile qui s'appuie sur trois autres droites fixes.* . 282

Différens modes de génération de l'hyperboloïde à une nappe. . . . . 285

CHAP. VI. *Méthode générale pour mener des plans tangens aux surfaces courbes, et applications de cette méthode* . . . . . 286

Equations de la normale à une surface de révolution et du second ordre . . . . . 291

Mener un plan tangent à une sphère, et qui soit parallèle à un plan donné. . . . . 292

Pag.

Problême sur le contact de deux sphères, et dont la solution dépend de l'intersection d'un paraboloïde de révolution et d'un plan. . . . . 296
Equation d'un plan tangent à deux sphères. . . . 298
et celle du cône qui leur est circonscrit. . . . 300

CHAP. VII. *Problêmes et theorêmes dont les solutions ou les démonstrations sont fondées sur la théorie précédente.* . . 301

Nouvelle démonstration de la formule par laquelle on obtient le volume du segment sphérique à deux bases. . . . . 301 — 304
Propriété du centre des moyennes distances de plusieurs points situés dans l'espace. . . . . 306
Autre propriété de ce centre . . . . . 309
Théorême sur le quadrilatère gauche . . . . . *ib.*
Théorême concernant l'hexaèdre irrégulier . . . 311
Equation du solide de révolution engendré par un arc tournant autour de sa corde . . . . . 314
Démonstration d'un fort beau théorême sur les polygones rectilignes gauches . . . . . 318

*Recherches des équations des courbes qui résultent des sections du cône par un plan* . . . . . 319 — 326

Théorêmes et problêmes relatifs aux surfaces du second degré . . . . . 326 — 336

*Des propriétés des projections stéréographiques et orthographiques des cercles de la sphère.* . . . . . 336
*Analyse des principales propriétés du tétraèdre* . . . . 343

Pag.

# QUATRIÈME SECTION.

## NOTIONS SUR L'APPLICATION DE L'ANALYSE TRANSCENDANTE A LA GÉOMÉTRIE.

CHAPITRE PREMIER. *Théorie générale des osculations* . . . . . 365

*Osculation des courbes planes.* . . . . . *ib.*

Diverses expressions du rayon de courbure. 372 — 374

Problême qui dépend de cette théorie. . . . . 379

Manière de déterminer l'équation d'une caustique par réflexion . . . . . 382

*Osculation des courbes à double courbure.* . . . . . 384

Expression du rayon du cercle osculateur . . . . 391

*Osculation des surfaces courbes.* . . . . . *ib.*

Solution d'un problême de catoptrique. . . . . 394

Les lignes de plus grande et de plus petite courbure sont à angles droits . . . . . 404

Forme simple sous laquelle se présente ordinairement l'équation des lignes de courbure. . . 405

Détermination de tous les plans qui retranchent d'un angle trièdre une pyramide équivalente à un volume donné . . . . . 408

CHAP. II. *Recherche des équations de différentes surfaces, d'après la considération du plan tangent* . . . . . 412

*Des surfaces cylindriques.* . . . . . *ib.*

Pag.
*Des surfaces coniques* . . . . . 413
*Recherche de l'équation de la surface conique individuelle circonscrite à une surface courbe donnée.* 414
Enoncés de deux théorèmes sur les surfaces du second degré . . . . . 418
*Des surfaces de révolution* . . . . . 419
CHAP. III. *Solutions de quelques problèmes* de maximis et minimis . . 423
La plus courte distance de deux droites données dans l'espace est perpendiculaire à ces droites. 428
Enoncés de plusieurs autres problèmes de ce genre . . . . . 441

# TRIGONOMÉTRIE

## APPLIQUÉE

## AU LEVÉ DES PLANS.

## SECTION PREMIÈRE.

### CHAPITRE PREMIER.

*Notions préliminaires.*

*Définitions.*

1. FORMER la *carte* d'un pays de peu d'étendue, c'est construire sur le papier une figure semblable à celle du terrain dont les différentes parties sont supposées être projetées sur un plan horisontal par des perpendiculaires abaissées de tous les objets sur ce plan.

On nomme *carte topographique* ou *plan*, le dessin qui représente tous les détails d'une contrée ou d'un domaine. Quant aux cartes embrassant beaucoup d'étendue de pays, et n'en offrant que les objets les plus remarquables, on les appelle *cartes géographiques*.

Pour déterminer les positions respectives des principaux points d'un plan, il faut considérer ces points comme les sommets des angles des triangles qui, par leur enchaînement, forment un réseau continu dans tous les sens. Ces triangles réunissent les conditions les plus avantageuses lorsqu'ils sont les plus grands possibles, qu'ils approchent le plus de la forme équilatérale, et qu'ils sont liés au moins à une ligne principale ou *base*. Lorsque cette base et les trois angles de chaque triangle sont mesurés, on a tous les élémens nécessaires pour calculer de proche en proche les distances entre les objets, et alors on a le *canevas* du plan. C'est en cela que consistent les *opérations géodésiques*. Avant d'indiquer la marche de ces calculs, il convient de faire connaître les instrumens qui servent pour mesurer les angles.

## *Description du Graphomètre.*

2. Le graphomètre, qui n'est plus guère en usage que parmi les arpenteurs, est un demi-cercle de cuivre divisé en 180° ou en 200$^{gr}$. Chaque degré ou grade est lui-même divisé en deux ou plusieurs parties égales, selon la grandeur du diamètre de ce demi-cercle.

La partie circulaire sur laquelle sont tracées les divisions se nomme le *limbe*. Aux graphomètres ordinaires, on adapte aux extrémités du diamètre fixe deux *pinnules* ou petites fenêtres au travers desquelles on regarde les objets. Chaque pinnule, qui doit être exactement perpendiculaire au limbe, est fendue par le haut et ouverte par le bas, ou réciproquement, et le milieu de l'ouverture est traversée dans le sens de sa longueur par une soie ou par un crin. Lorsqu'on vise à un objet on a soin

de mettre près de l'œil la fente d'une pinnule par laquelle on regarde si le fil correspondant couvre cet objet.

La règle mobile, que l'on nomme *alidade*, est assujétie à tourner autour du centre de l'instrument, et est garnie de même de deux pinnules. Pour mesurer les angles avec plus de précision, on a imaginé de tracer des parties plus petites que celles du limbe aux extrémités de cette alidade et près des pinnules. C'est à l'aide de ces petites divisions ou de ce *vernier* que l'on estime les parties du degré ou du grade. Supposons, par exemple, que le graphomètre soit divisé en 400 parties égales, dont deux forment le grade, et que 9 de ces parties correspondent à 10 parties du vernier; alors chacune de ces dernières embrassera, sur le limbe, un arc de $\frac{9 \times 50'}{10} = 45$ minutes centésimales. Si donc la première division du vernier, que l'on nomme *ligne de foi*, tombe exactement sur une division du limbe, l'angle compris entre le diamètre fixe et le diamètre mobile sera mesuré par les divisions du limbe. Si, au contraire, la seconde division du vernier coïncide avec une division du limbe, il faudra, au nombre de grades marqués sur le limbe jusqu'à la ligne de foi, ajouter 5′, quantité dont une partie du limbe excède une partie du vernier. En général on comptera de plus autant de fois 5′ qu'il y aura de parties du vernier depuis la ligne de foi jusqu'à la ligne qui correspond à l'une de celles du limbe. Pour pouvoir lire plus aisément les divisions et prendre leurs parties par estime, on se sert d'une loupe qui grossit les objets.

Les graphomètres les plus exacts et les plus commodes, sont ceux qui sont garnis de lunettes que l'on fait mouvoir à l'aide de vis de rappel, et que l'on arrête au

moyen de vis de pression. Quand les lunettes peuvent s'incliner de quelques grades à l'égard du limbe, on est dispensé de réduire à l'horison les angles qui n'y sont pas situés, parce qu'alors on observe dans ce plan.

Il est utile, en outre, qu'un niveau à *bulle d'air* soit adapté à la lunette inférieure pour pouvoir la disposer horisontalement lorsque l'on mesure des angles de hauteur. L'axe du tube de verre qui renferme de l'alcool ou de l'éther étant mis parallélement à l'axe optique de la lunette, il s'ensuit, d'après les lois de l'hydrostatique, que lorsque la bulle d'air occupe le milieu de ce tube la lunette est horisontale.

Tout l'instrument porte sur un pié construit de manière qu'il est facile d'incliner le limbe dans tous les sens. A cet égard on évite beaucoup de lenteur et de tâtonnemens en disposant le mieux qu'il est possible, dans la direction des objets que l'on observe, les vis qui produisent cette inclinaison.

### *Description du petit Cercle répétiteur.*

3. Entre autres différences remarquables, entre le graphomètre et le cercle répétiteur, c'est que les deux lunettes de celui-ci sont mobiles ou fixes à volonté. La lunette supérieure entraîne de même deux verniers, et son axe répond précisément au centre du limbe. A l'égard de la lunette inférieure qui porte un petit niveau à bulle d'air, elle est excentrique et elle tourne seule si l'on veut autour du pivot de l'instrument.

Le plus grand avantage du cercle répétiteur, est de pouvoir atténuer presqu'entièrement les erreurs de la division et celles des observations en répétant suffisam-

ment la mesure des angles, comme nous l'enseignerons bientôt.

Dans les petits cercles répétiteurs, le pivot qui supporte le limbe est soudé au centre d'un plateau circulaire auquel on peut procurer un mouvement de rotation lent ou rapide. Ce pivot est traversé par un axe ou essieu dont les extrémités entrent dans des collets faisant partie de deux montans auxquels on a donné le nom de *fourchette*. Un petit quart de cercle adapté au pivot s'appuie contre ces montans et s'y fixe au moyen d'une pince, quand on veut que l'inclinaison du limbe soit invariable. Enfin, vers la partie supérieure de la douille de l'instrument sont placées deux vis opposées qui servent pour incliner le limbe dans un sens contraire à celui pour lequel le quart de cercle est destiné.

Il y a déja quelques années que l'usage de ce précieux instrument, inventé par Borda, est répandu en France. C'est principalement dans les grandes opérations géodésiques, comme celles qui ont pour objet la mesure d'un arc du méridien, ou le levé trigonométrique d'un grand état, que le cercle répétiteur est indispensable. *Voy.*, sur ce sujet, mon *Traité de Géodésie*, et la *Base du système métrique*, par Delambre.

### *De la mesure des angles avec le graphomètre.*

4. [Fig. 1.] Pour mesurer, avec le graphomètre, l'angle *A* sous lequel on voit la distance *BC*, placez d'abord le centre de l'instrument au point *A*; puis disposez l'alidade fixe de manière que, regardant au travers des pinnules ou de la lunette, le fil vertical couvre le point *C*. Enfin dirigez l'alidade mobile ou la lunette

supérieure sur l'objet $B$ ; l'arc parcouru par celle-ci sera la mesure de l'angle $A$.

Cette méthode suppose que les trois points $A$, $B$, $C$, sont à très-peu-près dans le même plan horisontal, ou que le cercle porte des pinnules, ou bien qu'il est garni de lunettes plongeantes ( n°. 2 ). Autrement, si les points $B$, $C$ étaient hors de l'horison de l'observateur, et que les lunettes n'eussent point la propriété dont il s'agit, il faudrait placer le limbe dans le plan même de l'angle à mesurer.

L'angle sous lequel on voit l'élévation d'un objet situé au-dessus de l'horison du lieu où l'on observe, se nomme *angle de hauteur*; et l'angle sous lequel on voit l'abaissement d'un objet au-dessous de l'horison, se nomme *angle de dépression*. Ainsi en supposant que $AH$ soit horisontale [ Fig. 2 ], l'angle $BAH$ est un angle de hauteur, et l'angle $B'AH$ est un angle de dépression.

Pour mesurer ces angles verticaux on donne au plan de l'instrument la position verticale à l'aide d'un fil à plomb. Ensuite on met la lunette fixe horisontalement par le moyen du niveau à bulle d'air qui y est adapté; puis l'on dirige la lunette supérieure sur l'objet $B$ ou $B'$, de manière que le fil horisontal de cette lunette couvre le point de mire. Alors l'arc parcouru par cette lunette est la mesure de l'angle $BAH$, ou $B'AH$.

*De la mesure des angles avec le cercle répétiteur.*

5. Deux vérifications préalables sont à faire; 1°. c'est de s'assurer que les soies ou fils du *réticule* de chaque lunette n'offrent point de *parallaxe*: dans ce cas, leur image, lorsqu'elle se peint sur un objet distinct, ne

change point de place à l'égard de cet objet, quand on éloigne un peu l'œil de l'axe optique. On fait disparaître la parallaxe en remettant les fils au foyer de la lunette, ou l'on évite l'erreur qu'elle occasionnerait en visant toujours au milieu de l'oculaire.

2°. C'est de voir si les axes optiques des deux lunettes sont parallèles au plan du limbe. Comme il ne s'agit ici que des petits cercles répétiteurs, il sera suffisamment exact, après avoir dirigé les deux lunettes sur un même point éloigné, de faire coïncider les intersections des fils avec ce point, en tournant dans le sens convenable les vis de rappel des réticules. Il est utile à cet égard de prendre des renseignemens de l'artiste même qui a construit le cercle dont on se sert, afin de mieux concevoir les remarques précédentes.

Voici maintenant la manière de mesurer un angle entre deux objets terrestres, avec l'instrument actuel dont les divisions se lisent de gauche à droite.

Après avoir mis le limbe dans le plan des objets, on amène la lunette supérieure à zéro, et on la fixe par le moyen de la vis de pression. Ensuite on la dirige sur l'objet à droite; et pour l'y fixer, on serre la vis de pression du plateau. Cela fait, on rend mobile la lunette inférieure pour l'amener sur l'objet à gauche, puis on la fixe au limbe. Ensuite on desserre la vis de pression du plateau, afin de pouvoir faire tourner tout l'instrument jusqu'à ce que la lunette inférieure soit sur l'objet à droite. Lorsque cette circonstance a lieu on serre de nouveau cette vis, et l'on amène la lunette supérieure rendue libre sur l'objet à gauche; alors l'arc qu'elle a parcouru depuis son premier point de départ, est la mesure du double de l'angle observé.

On obtient le quadruple, le sextuple, etc. d'un angle en répétant 2, 3, etc. fois cette opération, et partant du point de division où la lunette supérieure se trouve à la fin de chaque *observation conjuguée*.

On nomme *distance au zénith* d'un objet, le complément de sa hauteur, ou sa dépression angulaire augmentée de 100 grades. Pour observer une distance au zénith, mettez le plan du cercle verticalement par le moyen d'un fil à plomb, et de manière que les divisions du limbe soient à votre droite. Amenez la lunette supérieure à zéro ; fixez-la, puis dirigez-la sur l'objet en faisant tourner le limbe, et serrez la vis du plateau. Ensuite mettez la lunette inférieure horisontalement au moyen du niveau à bulle d'air, et pour cet effet servez-vous de la vis de rappel de cette lunette. Si, par cette opération, la lunette supérieure se dérange, ramenez-la doucement sur le point de mire en faisant tourner la vis tangente du plateau, et rappelez la bulle au milieu du tube. Cela fait, amenez le limbe à votre gauche, dans le vertical de l'objet ; remettez la lunette inférieure horisontalement en faisant tourner le limbe par le moyen de la vis tangente du plateau. Enfin, ramenez sur l'objet la lunette supérieure rendue libre ; et l'arc qu'elle aura parcouru sera le double de la distance au zénith cherchée, ainsi qu'il est aisé de le prouver.

6. Lorsque le cercle répétiteur porte des lunettes plongeantes, on dispose toujours le limbe horisontalement, et par ce moyen les angles observés entre les objets terrestres, sont réduits sur-le-champ à l'horison, ce qui dispense de faire aucun calcul à cet égard. Mais de pareilles lunettes étant sujettes à se déranger par le

moindre choc, il est préférable de faire usage d'un cercle garni de lunettes ordinaires.

Cet instrument peut être employé de la même manière que le graphomètre, car il ne s'agit que d'amener la lunette inférieure à zéro, et de l'y fixer pendant tout le cours des observations. Pour cet effet on met la lunette supérieure à ce point; et après avoir fixé, avec cette lunette, un objet éloigné, on y dirige aussi la lunette inférieure, laquelle se trouve dans ce cas placée convenablement.

A la rigueur, les angles observés entre les objets terrestres auraient besoin d'une petite correction due à l'*excentricité* de la lunette inférieure; mais il est rare que l'on soit obligé d'en tenir compte, même dans les opérations les plus délicates de la géodésie. Il est cependant des réductions indispensables qu'il importe de faire connaître: c'est ce que l'on va voir dans les deux chapitres suivans.

# CHAPITRE II.

## *De la réduction des angles au centre de la station.*

### *Centres visibles et accessibles.*

7. LORSQU'ON lève la carte d'un pays on n'est pas toujours le maître de placer à son gré des signaux commodes pour l'observation, tels que ceux qui sont formés de pyramides creuses, ou d'un assemblage de longues files de bois garnies de feuillages, et disposées en forme de cônes alongés de manière que l'intérieur soit entièrement libre ; il faut souvent, au contraire, profiter des clochers, des tours, ou d'autres objets élevés qui peuvent être considérés comme les sommets des angles des triangles du réseau ; de là la nécessité fréquente d'observer à quelque distance de l'axe du signal, ou de placer le cercle au-dessus ou au-dessous du point de mire. Mais comme dans les petites opérations géodésiques on emploie presque toujours pour signaux de longues perches bien droites fichées en terre ; on les ôte pour pouvoir y placer le centre de l'instrument, et on les replace ensuite s'il est nécessaire. Voici la méthode que l'on emploie dans le cas contraire, et lorsque le centre de la station est visible et accessible.

[Fig. 3.] Soit $C$ le centre de la station, et $O$ celui de l'instrument ou le sommet de l'angle observé $AOB$. On demande la valeur de l'angle $ACB$, qui est la réduction du premier.

Faisons les données

$$AOB = O,\ BOC = y,\ CO = r,\ BC = G,\ AC = D,$$

et l'angle inconnu $ACB = C$.

Puisque l'angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux intérieurs opposés, on a, par rapport au triangle $IAO$,

$$AIB = O + IAO$$

et par rapport au triangle $BIC$,

$$AIB = C + CBO$$

égalant ces deux valeurs, on obtient

$$C = O + IAO - CBO.$$

D'un autre côté on a

$$\sin CAO = \frac{r \sin (O+y)}{D},\quad \sin CBO = \frac{r \sin y}{G};$$

mais les angles $CAO$, $CBO$ étant toujours fort petits, leurs arcs peuvent être pris pour leurs sinus; donc

$$C = O + \frac{r \sin (O+y)}{D} - \frac{r \sin y}{G},$$

et pour avoir la réduction en secondes,

$$C - O = \frac{R'' r \sin(O+y)}{D} - \frac{R'' r \sin y}{G} \qquad (1)$$

$R''$ étant le nombre de secondes contenues dans le rayon. (*Trigon.* de Legendre, pag. 406.)

L'usage de la formule précédente ne peut être embarrassant dans aucun cas, pourvu qu'on ait égard aux signes de $\sin(O+y)$ et de $\sin y$; ainsi le premier terme de la correction sera positif si l'angle $O+y$ est compris entre 0 et 200 grades, et il deviendra négatif s'il surpasse 200 gr. Le contraire aura lieu dans les mêmes circonstances, pour le second terme qui dépend de *l'angle de direction* y. (*Voy.* l'art. 13 de la *Trigonométrie* citée, ou l'art. 23 de celle de Lacroix.

Il est remarquable que $D$ est la distance de l'objet à droite, et $G$ la distance de l'objet à gauche. Quant à l'angle $y$, c'est toujours celui sous lequel paraissent le centre de la station et l'objet à gauche : ainsi quand on a mesuré l'angle $AOB$, la lunette supérieure est dirigée sur l'objet à gauche $B$, et l'inférieure sur l'objet à droite $A$ : alors celle-ci restant fixée sur $A$, si l'on fait mouvoir la lunette supérieure de droite à gauche, jusqu'à ce que son axe réponde au point $C$, l'arc qu'elle aura parcouru sur le limbe sera la mesure de l'angle $y$, qui doit toujours se compter suivant l'ordre des divisions de l'instrument, et dont la valeur peut aller depuis 0 jusqu'à 400 grades. Cet angle ne devant pas être mesuré avec une très-grande précision, l'on dirige seulement le mieux possible sur le centre $C$ la lunette supérieure rendue libre, en fixant deux points marqués sur le haut du tube,

l'un près de l'oculaire, l'autre près de l'objectif. Quant à la distance $r$ elle doit être mesurée avec exactitude, et à l'aide d'un cordeau.

Si plusieurs angles consécutifs $O$, $O'$, $O''$, $O'''$, etc., étaient situés dans un même plan, oblique à l'horison si l'on veut, on les réduirait tous au centre $C$, à l'aide d'un seul angle de direction $y$, et de la distance au centre $r$ : alors, par rapport à l'angle $O'$, l'angle de direction serait

$$y' = y + O$$

par rapport à $O''$

$$y'' = y' + O' = y + O + O'$$

par rapport à $O'''$

$$y''' = y'' + O'' = y + O + O' + O''$$

et ainsi de suite.

Donnons maintenant un exemple du calcul de la réduction au centre, et mettons l'équation (1) sous cette forme :

$$s = R''r\left\{\frac{\sin(O+y)}{D} - \frac{\sin y}{G}\right\}$$

en faisant $s = C - O$.

Soit l'angle observé $O = 48^{gr},756$
l'angle de direction $y = 294,1$
la distance au centre $r = 3^{m},257$
la distance de l'objet à droite $D = 17528^{m}$.
la distance de l'objet à gauche $G = 20345$

Ces deux dernières distances se calculent par approximation ; c'est ce que nous verrons bientôt.

| | 1er. terme de la correction. | | 2d. terme. |
|---|---|---|---|
| log. $R''$ | 5,80388 | | |
| log. $r$ | 0,51282 | | |
| | + 6,31670 | | — 6,31670 |
| log. sin $(O+y)$ | — 9.89310 | log. sin $y$ | — 9,99807 |
| comp. log. $D$ | 5,75627 | comp. log. $G$ | 5,69154 |
| | — 92″,483 — 1,96607 | + 101″,465 | + 2,00631 |
| Première partie | | — 92, 483 | |
| Réduction | | + 8, 982 | |
| Angle observé | | 48°,7560, | |
| Angle réduit au centre | | 48 , 7568,982 | |

Pour déterminer le signe de chaque résultat partiel, il faut avoir égard à la règle des signes employée dans la multiplication ; ainsi quand les facteurs négatifs sont en nombre impair, le produit doit être affecté du signe négatif : c'est le contraire lorsque les facteurs négatifs sont en nombre pair.

*Centres invisibles des tours à bases circulaires.*

8. [Fig. 4] Il arrive souvent que les centres des clochers, des tours, etc., au dedans ou au dehors desquels on observe sont invisibles. Voici les moyens les plus simples pour lever cet obstacle.

Si on est placé en $O$ extérieurement à la tour circulaire $TzT'$, on menera les tangentes $OT$, $OT'$, sur lesquelles on prendra deux distances égales et arbitraires $Ox$, $Ox'$, de manière cependant que la ligne $xx'$ soit le plus près possible de la tour dont $C$ est le centre :

on fera $mx = mx'$, et $Om$ sera évidemment dans la direction de ce centre. On observera alors l'angle $COB = y$, et à la distance $Oz$ on ajoutera le rayon $Cz$ pour avoir $CO = r$.

S'il était impossible de mesurer le rayon ou la circonférence du cercle $TzT'$, on mesurerait l'une des tangentes, $OT$, par exemple, et l'on aurait

$$Oz = \frac{\overline{OT}^2}{Oz'};$$

puisque toute tangente au cercle est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure. Le reste de l'opération n'a maintenant aucune difficulté.

Il est à propos de remarquer que l'on peut avoir encore l'angle $y$ sans connaître la direction de la sécante $Oz'$; car on a $COB = \frac{TOB + T'OB}{2}$; ainsi l'on fera coïncider d'abord l'axe de la lunette supérieure avec la tangente $OT$, ensuite avec la tangente $OT'$, et l'on tiendra compte chaque fois du nombre de grades marqué par cette lunette, qui doit toujours marcher de droite à gauche.

Lorsqu'on sera placé dans l'intérieur d'une tour circulaire, on fera en sorte de placer le centre de l'instrument sur le milieu de la corde qui passe par ce point, et la perpendiculaire à cette corde sera la direction du centre de la tour. Alors en mesurant cette même corde et la flèche de l'arc qu'elle soutend, il sera aisé de déterminer la distance au centre par la proposition 23 du Livre III de la *Géométrie* de Legendre.

*Centres invisibles des tours à bases polygonales.*

9. [Fig. 5.] Si l'on était en dehors de la tour rectangulaire $DD'$, en $O$ par exemple, et que de ce point l'on pût voir les extrémités de l'une des diagonales $DD'$, $dd'$, on aurait l'angle de direction $COB = y$, par la méthode suivante.

On menera une droite parallèle à $DD'$, en partageant en parties proportionnelles les côtés $OD$, $OD'$ du triangle $ODD'$, et le milieu de cette parallèle sera sur la direction $OC$.

Autrement, on mesurera exactement la droite $Op$ perpendiculaire à $dD'$, ainsi que la partie $pm$ comprise entre $Op$ et la perpendiculaire $Cm$ imaginée abaissée du centre de la tour sur le côté $d'D$. Comme $Cm$ est censé connu, on aura $mq$ par la proportion

$$Cm + Op : pm :: Cm : mq$$

ainsi la droite $qO$, dont la direction est maintenant déterminée, passera nécessairement par le centre $C$; on mesurera donc $qO$, et l'on aura

$$Cq = \sqrt{\overline{Cm}^2 + \overline{mq}^2}$$

et enfin

$$r = qO + qC$$

Ainsi les deux élémens de la réduction de l'angle observé en $O$ sont connus.

Il est visible que ce dernier procédé est général pour tous les polygones réguliers, soit que l'on observe dans l'intérieur, soit que l'on observe au dehors; toute la difficulté consiste, lorsque le centre est inaccessible, à

déterminer l'apothème *Cm* du polygone qui l'entoure, et c'est ce que la géométrie enseigne.

Cependant s'il arrivait que l'on ne pût mener la perpendiculaire *Op*, on tirerait la droite *Om*, et l'on éleverait à *Dp* une perpendiculaire vers le milieu de *pm*. La partie de cette perpendiculaire interceptée dans le triangle *COm* sera facile à déterminer par la théorie des lignes proportionnelles; on aura donc la direction du rayon *OC*, et ce moyen est aussi général que le précédent.

Il est évident que tout ce qui vient d'être dit relativement aux tours rondes ou polygonales, s'applique mot pour mot aux poutres verticales qui peuvent embarrasser le centre de la station.

Quand le signal sur lequel on dirige un rayon visuel a, par exemple, la forme d'un parallélipipède, et qu'il présente obliquement à ce rayon une de ses faces éclairées, il en résulte qu'un des côtés de l'angle observé, passant par le milieu de la face dont il s'agit, s'éloigne un peu du centre du signal; par conséquent cet angle a besoin d'une très-petite correction. Mais le plus souvent l'on ne tient aucun compte de cette correction due à ce qu'on appelle la *phase* du signal; parce qu'on l'évite en pointant sur le milieu même de ce corps, si on en voit tant la partie éclairée que celle qui est dans l'ombre.

# CHAPITRE III.

## *De la réduction des angles à l'horison.*

10. LES angles réduits au centre de la station se réduisent ensuite à l'horison, quand les angles de position ne sont pas situés dans le plan de l'observateur; parce que comme dans le système de projection adopté pour représenter les positions respectives des objets, on ne considère que les distances horisontales, il est nécessaire, pour calculer sous ce point de vue les côtés des triangles, de réduire leurs angles dans le plan même de ces distances.

[Fig. 6.] Soit $z$ le zénith de l'observateur qui, du point $C$, a observé l'angle $BCA$ incliné à l'horison $B'CA'$; cet angle aura pour réduction ou *projection horisontale* l'angle $B'CA'$ formé par les plans verticaux $ACA'$, $BCB'$, dans lesquels sont situés respectivement les signaux $A$, $B$.

Mais l'angle $B'CA'$ est le même que l'angle sphérique $z$ du triangle $zab$ formé par trois arcs de grands cercles, dont l'un $za$ est la distance au zénith de l'objet $A$; l'autre $zb$, la distance au zénith de l'objet $B$; et le troisième $ab$, la mesure de l'angle observé $BCA$. Donc si $\delta$, $\delta'$ sont les distances au zénith connues $za$, $zb$, et que $C$ soit l'angle $BCA$ au centre de la station, l'on connaîtra les trois côtés du triangle sphérique $abz$; ainsi en se

conformant à la notation actuelle, l'angle $z$ sera donné par cette formule, savoir :

$$\sin\tfrac{1}{2}z = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{C+\delta+\delta'}{2}-\delta\right)\sin\left(\frac{C+\delta+\delta'}{2}-\delta'\right)}{\sin\delta\sin\delta'}}$$

Le rayon des tables étant égal à l'unité. ( *Trigonom.* de Legendre, pag. 395. )

Soit

$$C = 65^{gr},4560, \quad \delta = 86^{gr},25, \quad \delta' = 85^{gr},40$$

l'opération par les logarithmes sera, en désignant $C+\delta+\delta'$ par $s$

| | | |
|---|---|---|
| Log sin $\left(\frac{s}{2}-\delta\right)$ | $= 32^{gr},303$ | 9,6865639 |
| Log sin $\left(\frac{s}{2}-\delta'\right)$ | $= 33,153$ | 9,6968322 |
| Comp. log sin $\delta$. . . . . | | 0,0102095 |
| Comp. log sin $\delta'$ . . . . . | | 0,0115224 |
| | | 19,4051280 |
| Log sin $\frac{1}{2}z$ . . . . . | | 9,7025640 $= 33^{gr},6392$ |

Ainsi la projection de l'angle $C$ est de $67^{gr},2784$.

Il est bien rare que les distances au zénith soient aussi petites que dans l'exemple ci-dessus ; et si elles ne différaient de l'angle droit que de deux ou trois grades, la formule précédente deviendrait trop pénible à calculer, pour avoir avec exactitude la projection de l'angle observé : il vaut mieux alors chercher la réduction, qui n'est que de

quelques secondes. Cette réduction s'obtient par la formule suivante :

$$x = \left(100^{gr} - \frac{\delta+\delta'}{2}\right)^{a} \cdot \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}C}{R''} - \left(\frac{\delta-\delta'}{2}\right)^{a} \cdot \frac{\text{cot.}\frac{1}{2}C}{R''}$$

que M. Legendre a démontrée (pag. 413 de sa *Trigonom.*). En voici le calcul.

Supposons que l'angle

au centre et qu'il soit compris entre deux objets dont les distances au zénith sont

$C = 56^{gr},9652$

$\delta = 98,2530$

$\delta' = 99,0525$

on aura $\delta+\delta' = 197^{gr},3055 \ldots \delta-\delta' = 0^{gr},7995$

$100^{gr} - \frac{\delta+\delta'}{2} = 1,7472 = p \qquad \frac{\delta-\delta'}{2} = 0,3997 = q$

| 1er. *terme positif.* | 2e. *terme négatif.* |
|---|---|
| Comp. log. = 4,19612 | 4,19612 |
| log. $p^2$ = 8,25886 | log. $q^2$ = 7,20347 |
| l. tang. $\frac{1}{2}C$ = 9,68111 | l. cot. $\frac{1}{2}C$ = 0,31889 |
| +2,13609 = 136″,83 | −1,71848 = 52″,30 |
| − 52,30 | |
| Réduction + 84,53 | |
| Angle réduit au centre $C$ = 56gr,9652,00 | |
| Angle réduit à l'horison 56gr,9736,53 | |

11. Après avoir réduit à l'horizon les trois angles d'un même triangle, on les corrige chacun du tiers de l'excès de leur somme sur deux angles droits. Les *angles moyens* qui résultent de cette opération sont ceux dont on fait usage pour résoudre rigoureusement les triangles.

Quand les triangles sont fort petits, l'excès dont il est question se compose entièrement des erreurs des observations, et il peut arriver même que cet excès se change en déficit : mais lorsque les distances entre les objets ont réellement une courbure sensible, ces triangles sont sphériques, parce qu'ils appartiennent à la surface de la terre considérée comme telle. Alors cet excès est une fonction des erreurs des observations et de l'excès de la somme des trois angles d'un triangle sphérique sur deux angles droits. Cependant, par le beau théorême de Legendre (pag. 416 de sa *Trigonom.*), la résolution d'un triangle de cette espèce et très-peu courbe d'ailleurs, se ramène à la résolution d'un triangle rectiligne, en suivant la règle que nous venons de prescrire. *Voy.* le *Traité de Géodésie*, 1re. et 2e. parties, où il existe des tables qui abrègent considérablement le calcul de la réduction précédente.

# CHAPITRE IV.

## *De la détermination des distances et de leur orientation.*

### *Mesure des bases.*

12. PUISQUE les triangles dont le canevas d'une carte est formé sont liés les uns aux autres, il s'ensuit, comme nous l'avons déja dit, qu'il suffit à la rigueur de connaître ou de mesurer un seul de leurs côtés pour pouvoir calculer toutes les distances entre les signaux. La mesure de ce côté ou de cette base est une des opérations les plus délicates et les plus importantes de la géodésie, et son exactitude doit être subordonnée à celle de la mesure des angles. Il est essentiel qu'une base ne soit pas trop petite, qu'elle soit établie sur un terrain de niveau, ou plutôt que la ligne géodésique qui la représente soit droite, et que sa longueur comparée à une unité de mesure parfaitement connue soit réduite à l'horison.

Dans les levés ordinaires, on se sert de perches que l'on met bout à bout dans la direction d'une droite tracée avec des jalons garnis d'un petit carré de papier blanc à leur extrémité supérieure, pour servir de point de mire. On a au moins deux de ces perches dont chacune a exactement deux mètres de longueur, et dont les abouts sont revêtus

d'un bouton de fer ou de cuivre. Communément on les dispose horisontalement sur des soles de bois, quand le terrain est très-peu incliné ; mais si la base est établie sur un terrain oblique à l'horison, il est plus commode de mesurer la longueur même de chacune des pentes comprises dans l'étendue de cette base ; et après avoir estimé leur inclinaison, soit avec le cercle répétiteur, soit par d'autres moyens que nous indiquerons par la suite, on réduit les mesures à l'horison à l'aide de la formule suivante :

Soit $k$ la longueur de la ligne droite mesurée, $i$ son inclinaison, et $x$ sa projection horisontale ; on aura évidemment par la propriété du triangle rectangle

$$x = k \cos i.$$

Mais comme le plus souvent l'angle $i$ est fort petit, il est plus commode de calculer l'excès de $k$ sur $x$ : alors on a

$$k - x = k\,(1 - \cos i) = 2\,k \sin^2 \tfrac{1}{2} i.$$

Ainsi la quantité qu'il faut ôter de la longueur mesurée pour la réduire à l'horison, est égale à deux fois cette longueur multipliée par le carré du sinus de la moitié de l'angle d'inclinaison.

Il importe de mesurer deux fois la même base et de prendre pour véritable ligne géodésique la *moyenne* entre les deux longueurs obtenues, quand leur différence tombe dans les limites des erreurs possibles des mesures ; et si l'on vise à une grande précision, il est essentiel de mesurer une base de vérification loin de la première, afin de s'assurer si les résultats fournis par les calculs des triangles s'accordent avec ceux qui dérivent des mesures prises sur le terrain.

Pour des plans de petits domaines, il est assez exact de

mesurer les lignes principales d'opérations avec une chaîne de 5 ou de 10 mètres ; mais avant de s'en servir il faut la vérifier sur un étalon, et lui donner environ 2 centimètres de plus que 10 mètres, vu qu'il est impossible de la tendre rigoureusement en ligne droite : d'ailleurs on risquerait, en voulant atteindre cette limite, d'en rompre les anneaux.

Les moyens que nous venons d'indiquer pour mesurer les bases, malgré leur exactitude, seraient insuffisans dans les grandes opérations géodésiques. Ceux qui voudraient connaître les véritables procédés à employer en pareille circonstance, les trouveront développés dans le grand ouvrage de M. Delambre, déja cité, et dans notre *Traité de Géodésie.*

13. Voici maintenant comment on réduit une longue base au niveau de la mer.

[Fig. 7.] Soit $\rho$ le rayon de la terre réputée sphérique pour le niveau de la mer ; $\rho+h$ le rayon pour le sol de la base $AMB$, supposé de niveau ; $h$ sera l'élévation $Aa$ du sol au-dessus de la surface des eaux. Soit de plus $B$ la base mesurée $AMB$, et $b$ la base réduite $amb$.

Cela posé, puisque les arcs semblables sont entre eux comme leurs rayons, on aura

$$\frac{B}{b} = \frac{\rho+h}{\rho};$$

Prenant la valeur de $B$, et ajoutant de part et d'autre $-b$, il viendra

$$B-b = \frac{Bh}{\rho+h} = \frac{\frac{Bh}{\rho}}{\left(1+\frac{h}{\rho}\right)} = \frac{Bh}{\rho}\left(1+\frac{h}{\rho}\right)^{-1}$$

Puis développant la puissance négative, on aura

$$B - b = \frac{Bh}{\ell} - B\frac{h^2}{\ell^2} + B\frac{h^3}{\ell^3} - \ldots\ldots$$

Tel est l'excès de $B$ sur $b$ : nous apprendrons dans le chapitre suivant à déterminer $h$.

Tous les côtés des triangles que l'on calculera d'après la base réduite $b$, seront des arcs de grands cercles d'une même sphère. On ne peut se dispenser de faire cette réduction quand on veut comparer la longueur d'une base mesurée avec la longueur que fournit le calcul des triangles ; mais pour les levés dont il s'agit dans le présent ouvrage, cette réduction est absolument inutile ; aussi ne l'avons-nous fait connaître que pour donner au lecteur une idée de ce qui se pratique dans la haute géodésie.

### *Orientation des plans.*

14. Un plan est *orienté* lorsque l'on connaît l'angle qu'une de ses lignes principales fait avec le méridien terrestre, parce que de là on peut assigner la place que les objets occupent à l'égard des quatre points cardinaux. Un des moyens faciles d'obtenir cet angle, est, pendant une belle nuit, de diriger la lunette supérieure du cercle répétiteur sur l'*étoile polaire*, après avoir disposé le limbe verticalement, comme pour prendre une distance au zénith ( n°. 5 ). On laisse cet instrument exactement dans cette position ; et quand il fait jour, on fait mettre un signal un peu loin de l'observateur, de manière qu'il se trouve dans l'axe optique de la lunette ramenée à l'horison : ensuite on observe l'angle entre ce signal et l'un

des objets dont la position est connue sur la carte ; ainsi que celle du lieu de l'observation. Cet angle, que l'on nomme *azimuth*, fait connaître la direction des côtés des triangles par rapport à la méridienne terrestre : le plan est donc orienté.

L'étoile polaire n'étant pas tout-à-fait située au pôle du monde (*Astronom. élém.*, par Biot, n°. 63), il convient, pour plus d'exactitude, de l'observer au moment même où elle est dans le méridien : or, on a reconnu que ce moment arrive à très-peu-près lorsque cette étoile est dans le même plan vertical avec la première des trois étoiles de la queue de la *grande ourse*, la plus voisine du quadrilatère. Ainsi l'on saura, à l'aide d'un fil à plomb, lorsque cette circonstance aura lieu. La nature de cet ouvrage ne comporte pas le développement des méthodes astronomiques dont il est préférable de faire usage pour déterminer les azimuths des côtés d'une grande chaîne de triangles ; mais l'on peut consulter sur ce sujet le *Traité de Géodésie* et les ouvrages de M. Delambre, sur la même matière.

### *Calculs des côtés des triangles.*

15. On a vu dans les numéros précédens comment, après avoir recueilli toutes les observations d'angles, on réduisait ces angles de manière que, dans chaque triangle, leur somme valût toujours deux angles droits ; mais la réduction au centre de la station exigeant la connaissance approchée des distances entre les signaux, on résout d'abord les triangles comme si les observations avaient été faites aux centres mêmes des stations.

[Fig. 8.] En supposant, par exemple, que dans le réseau triangulaire *ABCDE...*, le côté *AB* soit donné par un levé fait antérieurement à celui-ci, ou qu'il ait

été réellement mesuré ; on résoudra le premier triangle *ABC* à l'aide de ces deux proportions :

$$\left.\begin{array}{l}\sin C : \sin A :: AB : BC \\ \sin C : \sin B :: AB : AC\end{array}\right\} \quad (1)$$

On passera ensuite à la résolution du deuxième triangle *BCD*, dans lequel le côté *BC* calculé sera pris pour base, et l'on procédera de même de proche en proche, jusqu'au dernier triangle *FGH* : mais dans ce calcul préliminaire il suffit d'employer les logarithmes des côtés avec 5 décimales au plus.

Lorsque les angles sont ensuite réduits à l'horison, et que l'on a obtenu leurs *valeurs moyennes*, on résout derechef tous les triangles, en faisant usage des logarithmes à 7 décimales. De cette sorte, les distances cherchées sont déterminées avec toute l'exactitude possible.

Voici le type de ce dernier calcul :

Supposons que dans le triangle *ABC* la base *AB*, mesurée et réduite au niveau de la mer, soit de $24107^{m},28$, et que l'on ait pour les angles réduits aux centres des stations et à l'horison

$$\begin{array}{rl} A = & 68^{gr},03346 \\ B = & 62\,,\,07068 \\ C = & 69\,,\,89616 \\ \hline \text{Somme} = & 200\,,\,00030 \\ & 200 \\ \hline \text{Excès sur deux angles droits} = & 0\,,\,00030 \end{array}$$

Désignant par $A'$, $B'$, $C'$ ces mêmes angles diminués chacun du tiers de cet excès, on trouve

$$A' = 68^{gr},03336$$
$$B' = 62,07058$$
$$C' = 69,89606$$
$$\text{Somme} = 200.$$

Cela posé, les proportions (1) étant calculées par les logarithmes, on a

Comp. l. sin $C' = 0,0504811$ Comp. log. sin $C' = 0,0504811$
log. $AB = 4,3821482$ $4,3821482$
log. sin $A' = 9,9427811$ log. sin $B' = 9,9178747$

log. $BC = 4,3754104 = 23736^{m},15$ log. $AC = 4,3505040 = 22413^{m},2$

Dans la pratique, on ne saurait trop mettre de l'ordre dans les calculs, et chercher tous les moyens d'abréger les opérations : c'est dans cette vue que l'on pourrait disposer, ainsi qu'il suit, les données et les résultats précédens dans des tableaux dont les titres seraient imprimés d'avance.

| Noms des signaux. | Angles horisontaux affectés de l'erreur de l'observation | Angles horisontaux corrigés pour les calculs. | Logarithmes des sinus des angles. | Calcul des côtés. | Côtés en mètres. |
|---|---|---|---|---|---|
| | gr. | gr. | | 4,3821482 | m. |
| *A* | 68,03346 | 68,03336 | 9,9427811 | 0,0504811 | 23736,15 |
| | | | | 9,9427811 | |
| *B* | 62,07068 | 62,07058 | 9,9178747 | 4,3754104 | 22413,20 |
| | | | | 4,4326293 | |
| *C* | 69,89616 | 69,89606 | 9,9495189 | 9,9178747 | 24107,28 |
| | 200,00030 | 200,00000 | | 4,3505040 | |

Les mètres qui sont sur la même ligne que $A$ expriment la longueur du côté opposé à cet angle, et ainsi des autres.

Dans l'exemple précédent, tiré du calcul d'une chaîne de triangles du premier ordre, les angles sont exprimés en dixièmes de secondes centésimales; mais il est inutile de s'attacher à une si grande précision, toutes les fois que l'on n'observe qu'avec des petits cercles de $0^m,16$ de diamètre. Je n'ai choisi cet exemple qu'afin de montrer comment on peut apprécier l'erreur des observations; car les $3''$ d'excès trouvées ci-dessus n'expriment pas cette erreur seulement (n°. 11). En effet, on sait par le théorême de Legendre (art. 106, *Trigonom.*) que l'excès sphérique $\varepsilon$ d'un triangle très-peu courbe, est proportionnel à son aire $\alpha$ et a pour valeur $\frac{\alpha R''}{r^2}$, $R''$ étant le nombre de secondes comprises dans le rayon, et $r$ désignant le rayon de la terre. D'ailleurs l'aire $\alpha$ est égale à la moitié du produit de deux côtés du triangle que l'on considère, multiplié par le sinus de l'angle compris. Si donc l'on dénote par $A$, $B$, $C$ les angles du triangle, et par $a$, $b$, $c$ les côtés qui leur sont opposés, on aura $\alpha = \frac{1}{2} bc \sin A$; et en vertu des données précédentes, et de ce que $\log.\left(\frac{R''}{r^2}\right) = \log. R'' - 2 \log. r = 2,196119$, on aura

$$\begin{aligned}
\log.\tfrac{1}{2} &= 9,69897\\
\log. b &= 4,38215\\
\log. c &= 4,35050\\
\log.\sin A &= 9,94278\\
\hline
\log.\alpha &= 8,37440\\
\log.\text{constant} &= 2,19612\\
\hline
\log.\varepsilon &= 0,57052 = 3'',72
\end{aligned}$$

Ainsi la somme des erreurs commises dans la mesure des trois angles du triangle *ABC* n'est que de $0'',72$.

16. Au lieu de former le canevas d'une carte ainsi que le représente la figure, il est plus simple, lorsque l'on ne s'attache pas à une rigoureuse exactitude, de procéder de la manière suivante:

[ Fig. 9. ] Soient *A*, *B*, *C*, *D*, *F*, *G*, *H*, *K*, *L* les points fondamentaux d'un plan, points qui sont représentés par des signaux naturels ou par des signaux artificiels que l'on établit convenablement en faisant la reconnaissance du pays (n°. 7). On dessinera à vue tous les objets sur un *croquis* ou *brouillon* destiné à contenir les différentes mesures que l'on prendra dans le cours des opérations, et l'on y tracera la base *AB* des extrémités de laquelle on apperçoit la plupart des points *ABC*...., ayant soin toutefois que cette base ne soit pas trop petite à l'égard de sa distance aux points visibles. Ensuite on mesurera au point *A* avec le graphomètre, ou mieux encore avec le cercle répétiteur, les angles *CAB*, *DAB*, *HAB*, *FAB*, *BAG*. Si l'on se sert du graphomètre, il convient, pour plus de facilité et de précision, de diriger la lunette fixe sur le point *B*, et d'amener successivement la lunette mobile sur les points *C*, *D*, *H*, *F*, *G*. Ces observations étant faites à la première station *A*, on ira en faire de pareilles à la seconde station *B*; c'est-à-dire qu'on relevera les angles *CBA*, *DBA*, *HBA*, *FBA*, *GBA*: enfin l'on mesurera la base *AB* par l'un des moyens qui sont expliqués plus haut.

On voit que de cette manière on connaîtra dans chacun des triangles *ACB*, *ADB*..., un côté et les angles adjacens; on calculera donc facilement les distances *AC*, *CB*, *AD*, *DB*..., à l'aide desquelles et de la base *AB* on déterminera

ensuite, sur le *mis-au-net* et d'après l'échelle adoptée, les positions respectives des points *A*, *C*, *D*, *H*, *B*, *G*, *F*, soit par la méthode si connue des intersections, soit par le moyen d'un *rapporteur* (1).

Il reste à placer sur la carte les points *K*, *L*, qui n'ont pu être apperçus du point *A*, mais qui peuvent l'être des points *B*, *H* : pour cet effet, l'on considérera la distance *BH* comme une nouvelle base qui servira pour lier ces nouveaux points au premier système, en observant les angles *KHB*, *LHB*, *KBH*, *LBH*; parce que l'on connaîtra de même dans les triangles *KHB*, *LHB* deux angles et un côté. Il est évident qu'il n'est pas nécessaire de mesurer la distance *BH*, puisqu'elle est donnée par la résolution du triangle *AHB*.

*Calcul des distances à la méridienne et à sa perpendiculaire.*

17. Les deux méthodes que nous avons indiquées ci-dessus pour former le mis-au-net du canevas d'une carte, ne sont pas celles qui procurent la plus grande exactitude possible ; parce que si la position d'un point dépend essentiellement de celle des autres points déja placés, il

(1) Le rapporteur est un demi-cercle de cuivre ou de corne, divisé en 180 degrés ou en 200 grades, et quelquefois en demi-grades, s'il est d'un grand diamètre : on en fait un fréquent usage pour rapporter sur le papier les angles mesurés sur le terrain. On s'en sert aussi pour mesurer un angle sur le papier, et voici comment on procède à ce sujet. On place le centre de cet instrument au sommet de l'angle à mesurer, et l'on fait coïncider son diamètre avec un des côtés de cet angle : alors le nombre de grades contenus dans l'arc compris entre les deux côtés, est la mesure de ce même angle.

arrive qu'une erreur commise dans la détermination graphique de l'un d'eux influe sur la position de tous les autres points subséquens. Mais en les fixant à l'aide de leurs distances à deux droites fixes, par exemple, à la méridienne du lieu principal de la carte et à sa perpendiculaire (*Astronom. élém.*, par Biot, n°. 137), on rend leurs positions indépendantes les unes des autres. Cette méthode exige alors que l'on calcule les distances dont il s'agit, au moyen des triangles et de l'azimuth observés.

[Fig. 10.] Pour fixer les idées à ce sujet, soit $AX$ la méridienne du lieu $A$, et $AY$ sa perpendiculaire ; et supposons que les triangles $AMM'$, $AmM'$ etc... fassent partie d'un réseau trigonométrique : on demande les coordonnées des points $m$, $M$, $M'$ etc..., c'est-à-dire, les distances $Ap$, $pm$ ; $AP$, $PM$ ; $AP'$, $PM'$ etc... Si l'angle $mAP$ est l'azimuth observé (n°. 14), il est clair que tous les triangles seront orientés, et que l'on connaîtra très-aisément les autres azimuths $MAP$, $M'AP'$, puisque les angles $MAM'$, $M'Am$ sont connus. Ainsi en menant, par les sommets de tous les triangles de la chaîne, des parallèles à la méridienne et à sa perpendiculaire, comme on le voit à l'inspection de la figure, les côtés de ces triangles seront les hypoténuses de triangles rectangles que l'on pourra résoudre par le principe de l'art. 42 de la *Trigon.* de Legendre, ou de la même manière qu'au n°. 15.

Par exemple, la résolution des triangles rectangles $APM$, $AP'M'$ donnera les valeurs des coordonnées des points $M$, $M'$ ; la résolution du triangle $M'M''b$ fera de même connaître les distances $bM''$, $bM'$ ; et comme les coordonnées du point $M''$ sont $AP''$, $P''M''$, on aura

$$AP'' = AP' + bM', \quad P''M'' = P'M' - bM''$$

Pareillement lorsqu'on aura calculé les distances $dM''$, $dM'''$, on aura $AP''=AP'+dM'$, $P''M''=P'M'+dM''$, et ainsi du reste.

Lorsque l'on forme un tableau de toutes ces distances, on a soin d'indiquer le sens dans lequel elles doivent être prises ; et à cet égard on peut adopter la convention établie dans la théorie des courbes, relativement aux signes.

C'est de cette manière que les distances des lieux de la France à la méridienne et à la perpendiculaire, qui passent par l'Observatoire impérial, ont été calculées pour former la carte de cet Empire ; et déterminer les latitudes et les longitudes de toutes les villes qui en font partie. On trouvera dans le *Traité de Topographie, d'arpentage et de nivellement*, diverses formules propres à cette détermination.

# CHAPITRE V.

## *Exposition des méthodes géométriques employées pour déterminer les différences de niveau.*

18. LA détermination des distances horisontales des principaux points d'un plan exige la série de tous les calculs précédens, et le but est rempli si l'on n'a aucun besoin de connaître les différences des hauteurs des stations; mais il y a une foule de circonstances où cette connaissance est indispensable. S'agit-il, par exemple, de conduire des eaux d'un lieu à un autre, de régler les pentes d'une route, d'applanir ou d'exhausser un terrain, ou bien d'en former le relief; il faut préalablement se rendre compte de la forme du sol dans le sens de ses trois dimensions. Je vais donner dans ce chapitre une idée des moyens géométriques que l'on emploie pour cet objet, et qui font partie de l'art du *nivellement*. Quant aux procédés physiques qui remplissent le même but, on les trouvera exposés dans les 1^er^. et 4^e^. livres du *Traité de Topographie*, etc.

Deux ou plusieurs points sont de niveau entre eux lorsqu'ils sont également éloignés du centre de la terre. Quoique cette planète ne soit pas exactement sphérique, et qu'elle ait au contraire, par suite de son mouvement de rotation, la figure d'un sphéroïde applati vers les pôles et

renflé vers l'équateur, on peut, dans les opérations ordinaires du nivellement, supposer cet applatissement nul, et établir pour principe fondamental, qu'*une surface est de niveau, lorsqu'elle est parallèle à celle des eaux tranquilles des lacs ou des mers;* car telle est la propriété des fluides en repos, que leur surface libre fait partie de celle d'une sphère dont le centre est celui de la terre. Cependant, vu l'immense grandeur de son rayon, la surface des eaux circonscrites dans un très-petit espace peut être considérée comme plane ou horisontale. Les perpendiculaires à cette surface sont donc censées parallèles. Ce sont, comme l'on sait, ces perpendiculaires que l'on nomme *verticales.*

Une ligne horisontale ou perpendiculaire au fil à plomb est une *ligne de niveau apparent*, parce qu'il semble en effet que tous les points de cette droite sont de niveau entre eux, quoique cela n'ait pas lieu.

Toute ligne courbe tracée sur la surface de la terre supposée sphérique, est dite une *ligne de niveau vrai*: tel est, par exemple [fig. 11], l'arc terrestre *AD*.

Si au point *A* l'on conçoit une tangente à l'arc *AD*, la partie *BD* de la sécante *BC* sera la différence de niveau des deux points *A*, *B*, ou la hauteur du niveau apparent *AB* au-dessus du niveau vrai *AD*. Ainsi les eaux d'un canal dont le fond serait horisontal et représenté par *AB*, couleraient de *B* vers *A*, jusqu'à ce qu'elles fussent de niveau autour de ce dernier point.

Il est important, dans la pratique du nivellement, d'évaluer la hauteur *BD*, lorsque l'on connaît la longueur de la tangente *AB*: or, c'est à quoi l'on parvient aisément en considérant que toute tangente *AB* est moyenne proportionnelle entre la sécante entière *BH* et sa partie

extérieure $BD$. On a donc

$$BH : AB :: AB : BD = \frac{\overline{AB}^2}{BH} = \frac{\overline{AB}^2}{2\,CD + BD}$$

d'où

$$\overline{BD}^2 + 2\,CD \times BD = \overline{AB}^2$$

Pour calculer rigoureusement $BD$, il faudrait résoudre une équation du second degré ; mais cette hauteur est toujours si petite à l'égard du diamètre $2\,CD$ de la terre, que la formule précédente peut, sans erreur sensible, être réduite à

$$BD = \frac{\overline{AB}^2}{2\,CD}, \text{ ou, pour abréger, } h = \frac{a^2}{2\,R}.$$

De même pour une autre distance $AB' = a'$, on aurait $B'D'$ ou

$$h = \frac{a'^2}{2\,R}$$

D'où il suit que les hauteurs du niveau apparent au-dessus du niveau vrai, sont entre elles à très-peu-près comme les carrés des tangentes correspondantes, ou même des arcs auxquels ces tangentes appartiennent.

Sachant que le rayon $CD = R = 6366198^m$, ou que le logarithme de $2\,R = 7{,}1049101$, et connaissant la distance $AB = a$, il est facile de calculer la hauteur $h$ dont il s'agit. Cherchons, pour appliquer les principes ci-dessus, les hauteurs du niveau apparent au-dessus du niveau réel pour les distances 450 et $1000^m$.

La hauteur correspondante à $450^m$ sera donnée par la formule $h = \frac{a^2}{2\,R} = \frac{(450)^2}{2\,R}$, et l'on trouvera, en opérant à l'aide des logarithmes, que $h = 0^m{,}016$.

On aura ensuite la hauteur $h'$ correspondante à la distance $a'=1000^m$, par le moyen de cette proportion

$$a^2 : a'^2 :: h : h'$$

ou en valeurs numériques,

$$(450)^2 : (1000)^2 :: 0^m,016 : h'$$

Ainsi $h'=0^m,0785$. Si l'on devait effectuer d'autres calculs de cette espèce, il serait plus simple de comparer à cette dernière hauteur toutes celles que l'on aurait à déterminer; parce que la division s'effectuerait sur-le-champ, en déplaçant convenablement la virgule décimale, comme cela est évident.

19. La triangulation d'une carte topographique faite ainsi qu'il a été expliqué dans les chapitres précédens, fournit tous les élémens nécessaires pour calculer les différences de niveau des stations. Voici comment:

[Fig. 12.] Soient $A$ et $B$ deux des stations où l'on a observé les distances réciproques au zénith, c'est-à-dire, les angles $ZAB=\delta$; $VBA=\delta'$ formés par les verticales $CZ$, $CV$, et par la droite $AB$. Si, par le point $A$, on mène une corde $AD$ parallèle à la corde terrestre $ad$, les points $A$, $D$ seront de niveau entre eux, et $BD$ sera la hauteur du point $B$ au-dessus du point $A$. La résolution des triangles a fait connaître l'arc $AD$, lequel, vu sa petitesse, peut être pris pour sa corde. Ainsi, dans le triangle $ABD$, on a en général

$$\sin BAD : \sin ABD :: BD : AD$$

d'où

$$BD = \frac{AD \times \sin BAD}{\sin ABD}$$

mais il est évident que si $q$ désigne le quadrant, on a

$$BAD = 2q - ZAB - DAC$$

$$= 2q - \delta - \left(1q - \frac{C}{2}\right)$$

$$= 1q - \delta + \frac{C}{2}$$

et

$$ABD = 2q - VBA$$

$$= 2q - \delta'.$$

D'ailleurs le triangle $ABC$ donnant
$2q = C + (2q - \delta) + (2q - \delta')$ on a

$$\frac{C}{2} = \frac{\delta + \delta'}{2} - 1q, \quad \text{ou } 1q = \frac{\delta + \delta'}{2} - \frac{C}{2};$$

partant

$$BAD = \frac{\delta' - \delta}{2}, \quad ABD = 1q + \frac{\delta - \delta'}{2} - \frac{C}{2};$$

et en désignant par $K$ la corde ou l'arc $AD$, il s'ensuit que $BD$ ou

$$H = \frac{K \sin \frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\cos \frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)}. \qquad (1)$$

Cette formule est exacte; mais dans toutes les triangulations secondaires, telles que celles qui sont l'objet de cette section, l'on peut faire $\frac{1}{2}C = 0$; alors à cause de $\frac{\sin m}{\cos m} = \text{tang } m$, on a simplement

$$H = K \text{ tang } \frac{1}{2}(\delta' - \delta). \qquad (2)$$

Lorsque $\delta' > \delta$, $H$ est positif; c'est le contraire si $\delta' < \delta$;

$\delta$ étant la distance au zénith observée au lieu dont on connaît l'élévation au-dessus d'un niveau fixe, comme celui d'un lac ou de la mer, et $\delta'$ étant la distance au zénith au lieu dont on cherche l'élévation.

[Fig. 13.] Il convient de faire remarquer que cette formule suppose que les points $A$, $B$ sont les sommets des signaux, mais il est presque toujours impossible d'y placer le centre de l'instrument. Par exemple, quand on observe le point $B$, ce centre est souvent en $a$, c'est-à-dire, plus bas; et quand on observe en $B$, ce même centre se trouve en $b$ : les distances au zénith mesurées sont donc $ZaB = \Delta$, $VbA = \Delta'$ au lieu de $ZAB$, $VBA$. Dans ce cas, on réduit au sommet ou au pié des signaux ces distances au zénith, au moyen de la formule suivante, qu'il est aisé de démontrer:

$$d\Delta = R'' \frac{dH \sin \Delta}{K},$$

$\Delta$ étant l'angle observé réellement, $dH$ désignant la hauteur du signal au-dessus du cercle, ou la distance verticale de cet instrument au pié du signal, et $R''$ étant le nombre de secondes contenues dans le rayon. La valeur de $d\Delta$ est additive ou soustractive, selon que l'on réduit $\Delta$ au sommet ou au pié du signal; c'est-à-dire que l'on a

au sommet du signal $\delta = \Delta + d\Delta$,
au pié du signal $\delta = \Delta - d\Delta$.

Voici le type de ce calcul.

Soit $\Delta = 100^{gr},2408$, $\Delta' = 99^{gr},9259$,
$Aa$ ou $dH = 17^{m}$, $Bb$ ou $dH' = 15^{m},1$.

On aura d'abord, en vertu de la formule (3), et en

sachant d'ailleurs que $\log K = 4{,}1606823$,

| | |
|---|---|
| $\log dH = 1{,}23045$ | $\log dH' = 1{,}17898$ |
| l. sin $\Delta = 9{,}99999$ | l. sin $\Delta' = 9{,}99999$ |
| c. log $K = 5{,}83931$ | c. log $K = 5{,}83931$ |
| log $R'' = 5{,}80388$ | log $R'' = 5{,}80388$ |
| log $d\Delta = 2{,}87363 = +747'',5$ | log $d\Delta' = 2{,}82216 = +663'',9$. |

Ensuite, pour la réduction,

| au sommet $A$, | au sommet $B$, |
|---|---|
| $\Delta = 100^{gr},24'08''$ | $\Delta' = 99^{gr},92'59''$ |
| $+d\Delta = \quad 0\,,\ 7\,47\ 5$ | $+d\Delta' = \quad 0\,,\ 6\,63\ 9$ |
| Distance réduite, $\delta = 100^{gr},31'55''5$ | $\delta' = 99^{gr},99'22''9$ |

Maintenant que l'on connaît $\delta$ et $\delta'$, on aura, par la formule (2), la différence de niveau des points $A$, $B$.

$$\log K = 4{,}1606823$$
$$\log \text{tang } \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) = -7{,}4046430$$
$$\log H = -1{,}5653253 = -36^{m},756.$$

Il suit de là que le point $B$ est de $36^{m},76$ plus bas que le point $A$.

Lorsqu'il n'est pas possible de faire des observations réciproques, et que la distance $K$ n'est pas considérable, il est permis de supposer que $\delta' = 200^{gr} - \delta$; et pour lors la formule (2) se change en celle-ci :

$$H = K \cot \delta ; \qquad (4)$$

selon que $\delta$ sera aigu ou obtus, la hauteur $H$ sera positive ou négative.

Voilà des formules qui sont dépendantes de la ligne géodésique $K$ ou d'une base horisontale. Il est possible cepen-

dant de déterminer géométriquement la différence de niveau de deux points, sans connaître cette ligne. En effet, la formule (2) devient seulement fonction des distances réciproques au zénith et du rayon de la terre; car, à cause de $K = 2\rho \sin \frac{1}{2} C$, $\rho$ étant le rayon de la terre correspondant au milieu de la corde $K$, et $C$ l'*amplitude* de l'arc soutendu par cette corde ou l'angle $ACB$, on a

$$H = 2\rho \sin \tfrac{1}{2} C \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\delta' - \delta)$$

mais par ce qui précède $\frac{C}{2} = \frac{\delta + \delta'}{2} - 1\,q$; donc

$$H = -2\rho \cos \tfrac{1}{2} (\delta + \delta') \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\delta' - \delta) \qquad (5)$$

Il faudra, pour déterminer le signe de $H$, avoir égard à ceux des facteurs du second membre.

Dans la quatrième édition de son *Traité élémentaire de Trigonométrie*, M. Lacroix est parvenu, par des considérations simples, à deux séries convergentes dont les premiers termes, presque toujours suffisans dans la pratique, donneraient les mêmes valeurs numériques que les formules ci-dessus (4) et (5). *Voy.* sa note *sur le nivellement*, p. 54.

En procédant ainsi de signal en signal, on ne déterminerait que leurs *hauteurs relatives*; voici la règle à suivre pour obtenir leurs *hauteurs absolues*, c'est-à-dire, les élévations de leurs sommets au-dessus d'un même horison, de celui de la mer, par exemple.

Supposons que les points $B$, $B'$, $B''$..... $B^{(n)}$, sommets des signaux, soient inégalement élevés au-dessus d'un horison commun, de manière que $h'$ soit l'élévation du point $B'$ au-dessus du niveau de $B$; $h''$ l'élévation du point $B''$ au-dessus du niveau de $B'$; $d'''$ la dépression du point $B'''$ au-dessous de $B''$, et ainsi de suite. Il est évident alors que

l'on aura généralement

$$H - D = \text{différence de niveau,}$$

en prenant positivement les hauteurs $h$, dont la somme est $H$, et négativement les dépressions $d$ dont la somme est $D$. Si cette formule a pour résultat le signe $+$, le point $B$ sera au-dessus du niveau de $B$; et si elle a le signe $-$, le point $B$ sera au-dessous du même niveau.

Concluons de là que si $N$ est la hauteur du point $B$ au-dessus du niveau de la mer, $N + H - D$ sera la hauteur de tout autre point au-dessus de ce niveau. Pour avoir ensuite les hauteurs absolues du sol, on retranchera la longueur de chaque signal de la hauteur absolue de son sommet. Toutes ces règles sont assez faciles pour qu'il soit inutile d'en rapporter des exemples.

20. Dans toute la théorie précédente, nous avons supposé qu'un rayon lumineux qui part d'un objet pour venir en peindre l'image dans notre œil, y arrivait en ligne droite : cependant, quand il traverse des milieux d'inégales densités, il éprouve une déviation principalement sensible dans le sens vertical ; et ce n'est que suivant la tangente à la courbe qu'il décrit, que nous voyons l'objet. C'est cette déviation que l'on nomme *réfraction*. Son effet est de faire paraître presque toujours les objets plus élevés qu'ils ne le sont réellement ; et il est d'autant plus grand que le rayon visuel s'écarte moins de la surface de la terre. (*Astronom. phys.*, par Biot, pag. 36.) De là vient que le point $B$ observé du point $A$, et supposé éloigné de celui-ci de plus de $1000^{m}$., paraît réellement au-dessus de son lieu vrai. Comme nous ne pouvons entrer ici dans l'explication des moyens propres à évaluer l'effet de la réfraction, puisque nous supposons que les limites entre

lesquelles se trouvent renfermées les opérations du nivellement sont très-rapprochées : nous nous bornerons à renvoyer aux ouvrages déja cités, si l'on desire acquérir plus de connaissances sur ce sujet. Nous observerons cependant que les formules (1) et (2) du n°. 19 ne changent pas dans l'hypothèse d'une réfraction. Cela tient à ce que cette réfraction étant la même en $A$ qu'en $B$, sa valeur doit nécessairement disparaître de l'expression $\delta' - \delta$, ou, ce qui est de même, quand on fait des observations réciproques et simultanées. En général, l'angle de réfraction est à très-peu-près $\frac{1}{12}$ de l'amplitude de l'arc terrestre compris entre les verticales des deux points $A$, $B$, dont on cherche la différence de niveau.

Il résulte de ce qui précède, que le nivellement d'un terrain d'une grande étendue s'exécute avec beaucoup de précision par le moyen du cercle répétiteur ; mais cette méthode suppose que les points extrêmes de ce nivellement sont liés par un réseau de triangles, et qu'un des côtés de ce réseau, pris pour base, a été mesuré avec un soin tout particulier. Dans la plupart des travaux militaires et civils, où l'on se propose bien moins de connaître les distances itinéraires que les différences de niveau, on a recours à des moyens beaucoup plus simples et plus prompts. En effet, à l'aide d'un instrument ou *niveau*, qui, comme le *niveau d'eau* ou le *niveau à bulle d'air* de Chezy, procure sur-le-champ une ligne horisontale, il est facile de rapporter à cette ligne les élévations ou les dépressions des objets. C'est ce que j'ai amplement développé dans l'ouvrage cité au commencement du n°. 18. On y verra aussi comment on peut déterminer les différences de niveau avec le baromètre. Consultez sur ce point l'*Astronom. élém.*, par Biot, pag. 136, ou la *Mécanique*, de Francœur, pag. 447.

# CHAPITRE VI.

## *Opérations de détail.*

21. APRÈS avoir formé le canevas d'un plan, il reste à figurer tous les objets qui doivent couvrir sa surface, comme les masses de maisons, les rivières, les ruisseaux, les chemins, les limites des différentes cultures, en un mot toutes les propriétés particulières ainsi que les divers mouvemens du terrain. On conçoit d'après cela qu'il faut, pour parvenir complètement à ce but, réunir aux connaissances de géométrie pratique celles du dessin topographique. Cet art, qui tient et du dessin d'imitation et de celui de convention, ne peut être présenté dans tous ses détails que dans un traité *ex professo*. Nous parlerons donc seulement de ce qui a rapport au figuré géométrique des lignes, à l'aide des deux instrumens dont nous avons donné ici la description; et nous renverrons, pour ce qui concerne l'usage de la planchette, de la boussole, etc, au 3e. livre du *Traité de Topographie*.

En général, il y a deux méthodes de lever les détails. La première est de tracer autour de l'espace à figurer un polygone quelconque du plus petit nombre possible de côtés; ou si cet espace est considérable, de le diviser en polygones partiels, d'en mesurer exactement les angles et les côtés, puis d'abaisser de petites perpendiculaires de toutes les sinuosités du terrain sur ces côtés pris pour bases

ainsi qu'on le voit [fig. 14]; et enfin, après avoir pris toutes les mesures nécessaires, de dessiner tous les objets renfermés dans ces polygones. Dans l'application de cette méthode, il importe d'éviter les angles trop aigus ou trop obtus, parce que la position d'un point donnée par l'intersection de deux lignes est d'autant plus exacte que ces lignes se coupent moins obliquement.

La seconde méthode qui facilite singulièrement l'évaluation des surfaces agraires, est, lorsque le terrain s'y prête, d'abaisser des perpendiculaires de tous les angles du périmètre des masses à lever, sur des lignes directrices ou bases que l'on rattache aux côtés des triangles du canevas. C'est ce que l'on voit à la seule inspection des fig. 15 et 20, dans lesquelles toutes les lignes ponctuées sont des lignes d'opération. Cette dernière méthode est même fort en usage parmi les arpenteurs, soit qu'ils lèvent isolément un champ, soit qu'ils détaillent les masses d'un cadastre, parce qu'elle dispense de tout calcul trigonométrique. J'observerai cependant qu'elle est loin d'être préférable à la première méthode, sur-tout lorsqu'il s'agit de figurer un pays de montagnes ou un pays extrêmement couvert et accidenté.

On conçoit bien que, pour des opérations de détail un peu compliquées, de simples croquis dessinés à vue, comme le font la plupart des arpenteurs, sont peu propres à diriger dans le mis-au-net; aussi convient-il, pour plus de sûreté, de diviser le canevas du plan en plusieurs rectangles partiels, et de les rapporter à l'échelle des détails, afin de pouvoir figurer exactement au crayon, sur les lieux mêmes, tous les détails à fur-et-mesure que l'on opère. Mais il est essentiel d'arrêter le soir son dessin, à l'encre

de la Chine, et d'écrire bien nettement toutes les mesures qui ont été prises.

Les ingénieurs géographes et ceux des ponts-et-chaussées, qui figurent le terrain à l'aide de la planchette ou de la boussole, se contentent souvent de retrouver les mesures sur le plan même, au moyen de son échelle et du rapporteur; mais pour des opérations relatives à un cadastre, il y aurait de l'inconvénient à procéder de la sorte; sur-tout si les détails étaient rapportés à une petite échelle, et s'ils n'étaient pas représentés avec un soin extrême. J'ai été plus d'une fois à portée de reconnaître des différences notables entre les évaluations des surfaces déduites des mesures graphiques, et celles qui dérivaient des mesnres prises sur le terrain.

Une autre source d'erreurs est que certaines personnes mesurent les lignes dans le sens même de leurs pentes, et ne les réduisent point ensuite à l'horison. Cependant il est de règle, en topographie, que toutes les surfaces doivent se projeter sur un plan horisontal par des perpendiculaires à ce plan; et cela est absolument nécessaire pour parvenir à raccorder tous les détails entre eux, et à les enchâsser dans le canevas trigonométrique. D'ailleurs, un aut e motif qui a déterminé à choisir cette *méthode de cultellation* de préférence à la *méthode de développement*, c'est parce qu'il est reconnu que le produit de la culture n'est pas toujours proportionnel à sa surface. En effet, un champ placé sur un côteau ne produit pas autant qu'un champ de même superficie et de même qualité situé en plaine. Ainsi, quand des cohéritiers ont un droit égal dans le partage des terres, il faut, au lieu de diviser ces terres en parties égales, les partager en parties qui soient entre elles en raison inverse de leurs produits.

# CHAPITRE VII.

## *Evaluation des surfaces agraires.*

22. APRÈS avoir formé les détails d'un plan par l'une des méthodes exposées dans le chapitre précédent, on procède aux calculs des superficies des diverses propriétés de chaque particulier ; et il est un moyen de s'assurer de leur exactitude, c'est d'évaluer en masse l'étendue superficielle de tout le plan ; opération qu'il est aisé d'effectuer, puisque, par le mode de construction du canevas trigonométrique indiqué au n°. 17, il ne s'agit que de calculer les aires des triangles et des trapèzes rectangles dont le canevas est composé. Quoique de telles opérations numériques n'offrent rien de difficile, et soient fondées sur les principes d'une géométrie élémentaire, nous allons en fournir des exemples en faveur des jeunes gens qui débutent dans la carrière topographique.

### PROBLÈMES FONDAMENTAUX.

PROB. I. *Mesurer l'aire d'un rectangle et d'un parallélogramme.*

[Fig. 16.] Soient $AB = A'B' = 59^m,8$ les bases, et $AC = C'H' = 37^m,05$ les hauteurs du rectangle *ABCD*

et du parallélogramme $A'B'C'D'$. L'aire $S$ de chacune de ces deux figures étant égale au produit de ces deux dimensions, il est clair que l'on a pour le rectangle comme pour le parallélogramme

$$S = 59^{m},8 \times 37^{m},05 = 2215^{m.c},59 = 22^{ares},15^{m.c}59$$

PROB. II. *Mesurer l'aire d'un triangle rectiligne.*

*Connaissant la base et la hauteur.*

[Fig. 17.] Soit $AB = 9^{m},6$ la base, et $CD = 5^{m}$ la hauteur du triangle rectiligne $ACB$. L'aire d'un triangle quelconque étant égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur, on a

$$S = \frac{9^{m},6 \times 5}{2} = 24^{m.c}.$$

*Connaissant les trois côtés.*

Il arrive souvent qu'il est impossible de pénétrer dans l'intérieur d'un triangle, et de parcourir même l'espace qui l'environne ; alors on mesure les trois côtés de cette figure, et l'on fait usage de la formule suivante :

$$S = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)},$$

dans laquelle $S$ désigne l'aire du triangle ; $a$, $b$, $c$ ses trois côtés ; et $p$ son périmètre $= a + b + c$. (*Géom.* de Legendre, p. 296.)

Soit $a = 25^{m}$, $b = 20^{m}$, $c = 15^{m}$, on trouvera que

$$S = \sqrt{30.(30-25)(30-20)(30-15)} = 150.$$

On pourrait en général effectuer ce calcul à l'aide des tables de logarithmes ; mais dans ce cas particulier on détermine plus simplement l'aire cherchée, puisque le triangle $ABC$ est rectangle. En effet, le carré du plus grand côté $a$ étant égal à la somme des carrés des deux autres côtés $b$, $c$, on a

$$S = \frac{b.c}{2} = \frac{20 \times 15}{2} = 150.$$

Ce problême est un des plus utiles de la géométrie pratique ; on peut à son moyen évaluer l'aire de quelque polygone que ce soit, sans employer d'autre instrument qu'une chaîne métrique ou le mètre lui-même, puisqu'en mesurant les trois côtés de chaque triangle en lesquels ce polygone sera décomposé, la formule précédente recevra immédiatement son application ; mais cette méthode est beaucoup plus longue que celle que j'exposerai bientôt.

*Connaissant deux côtés et l'angle compris.*

Si dans un triangle dont $A$, $B$, $C$ sont les angles, et $a$, $b$, $c$ les côtés respectivement opposés, on connaît les deux côtés $b$, $c$, et l'angle $A$ compris, et que l'on nomme $h$ la perpendiculaire $CD$, on aura, à cause du triangle rectangle $ACD$,

$$h = b \sin A,$$

en supposant le rayon des tables $= 1$ ; mais l'aire $ACB = \frac{AB \times CD}{2} = s$ ; donc

$$s = \frac{bc}{2} \sin A.$$

c'est-à-dire que l'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit des deux côtés connus, multiplié par le sinus de l'angle compris.

Soit $b = 25^m,4$ ; $c = 30^m,2$ ; $A = 42^{gr},15'$ ; on aura

$$\log b = 1,4048337$$
$$\log \tfrac{1}{2} c = 1,1789769$$
$$\log \sin A = 9,7887106$$
$$\log s = 2,3725212$$

ainsi l'aire du triangle, ou $s = 235^{m.c},79$.

*Connaissant un côté et les deux angles adjacens.*

Dans le triangle $ABC$, on a, comme on sait,

$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin B}{\sin (A+B)} = \frac{b}{c} ;$$

de là tirant la valeur de $b$ et la substituant dans la formule $s = \frac{bc}{2} \sin A$ obtenue ci-dessus, on trouve

$$s = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin A \sin B}{\sin (A+B)} ;$$

expression qu'il est facile de calculer de même par les logarithmes.

PROB. III. *Trouver l'aire d'un quadrilatère dont on connaît les deux diagonales et l'angle qu'elles forment.*

En vertu de l'une des solutions précédentes, on a [Fig. 18]

$$\text{aire } BEC = \frac{yz}{2} \sin E$$

$$ABE = \frac{xz}{2} \sin E$$

$$AED = \frac{xt}{2} \sin E$$

$$DEC = \frac{yt}{2} \sin E;$$

donc

$$ABCD = \frac{xz+xt+yz+yt}{2} \sin E = \frac{(x+y)(z+t)}{2} \sin E.$$

Il suit de là que l'aire d'un quadrilatère est égale à la moitié du produit de ses deux diagonales, multiplié par les sinus de l'angle compris.

Quoique dans l'arpentage, on ait rarement besoin d'évaluer l'aire des figures régulières, je vais donner quelques exemples de calculs à ce sujet.

PROB. IV. *Mesurer l'aire d'un polygone régulier.*

[Fig. 19.] Si on connaît le côté $K$ d'un polygone régulier et le nombre $n$ de ses côtés, son aire $s$ s'obtiendra à l'aide de la formule

$$s = \tfrac{1}{4} nK^2 \cot \frac{2q}{n}$$

$q$ désignant le quadrant. L'angle au centre $C$ du polygone étant $= \frac{4q}{n}$, sa moitié $= \frac{2q}{n}$; et comme le triangle $ACD$ est rectangle en $D$, on a

$$CD = \frac{K}{2} \cot \frac{2q}{n}$$

Or l'aire de tout polygone régulier est égale au produit de son périmètre $nK$ par la moitié de son apothème $CD$; donc, etc.

Pour appliquer la formule actuelle à un exemple, soit $K = 12^m$, et $n = 8$, on aura

$$\log K = 1{,}0791812$$
$$\textit{idem.} = 1{,}0791812$$
$$\log \frac{n}{4} = 0{,}3010300$$
$$\log \cot \frac{200^g}{8} = 0{,}3827757$$
$$\log s = 2{,}8421681 ;$$

l'aire cherchée est donc égale à $s = 695^{m.c}{,}29$.

PROB. V. *Trouver l'aire d'un cercle dont on connaît le rayon.*

L'aire d'un cercle est égale au carré de son rayon, multiplié par le rapport de la circonférence au diamètre, c'est-à-dire par $\pi = 3{,}14159265$ : ainsi appelant $r$ le rayon d'un cercle, et $s$ son aire, on a

$$s = \pi r^2.$$

L'approximation sera presque toujours suffisante, en supposant seulement $\pi = 3{,}14$.

Soit, pour exemple, $r = 16^m$, on aura

$$s = 3{,}14 \times \overline{16}^2 = 803^{m.c}{,}84 ;$$

Si on voulait opérer par les logarithmes, au double

du logarithme du rayon, on ajouterait celui de $\pi$, lequel $= 0{,}4971479$, et la somme serait le logarithme de l'aire demandée.

Il est évident que l'on peut aussi déterminer le rayon d'un cercle dont l'aire est connue.

PROB. VI. *Déterminer l'aire d'un secteur dont l'arc est de* n *grades, et dont le rayon* $= r$.

Puisque l'aire $s$ du secteur est à celle du cercle comme l'arc du secteur est à la circonférence entière, et que deux arcs d'un même cercle sont entre eux comme les nombres de grades qu'ils comprennent, on a

$$s : \pi r^2 :: n : 400, \quad \text{d'où } s = n\,\frac{\pi r^2}{400};$$

par conséquent

$$\log \text{surf. du secteur} = \log n + 2\log r + 7{,}895\,089\,88.$$

PROB. VII. [Fig. 19.] *Trouver l'aire du segment dont l'arc comprend* n *grades, et dont le rayon* $= r$.

L'aire du segment $AnB$ est égale à celle du secteur $ACBnA$, moins l'aire du triangle $ABC$. Or, par ce qui précède,

$$\text{aire du secteur} = n \cdot \frac{\pi r^2}{400}$$

$$\text{et celle du triangle } ACB = \frac{r^2}{2} \sin n;$$

donc

$$\text{aire du segment} = 2\log r + \log \tfrac{1}{2}\left(n\,\frac{\pi}{200} - \sin n\right)$$

Si on fait $a = n\,\frac{\pi}{200}$, on aura $\log a = \log n + 8{,}196119877$; partant

$$\text{log. aire du segment} = 2\log r + \log \tfrac{1}{2}\,(a \mp \sin n),$$

le signe — ayant lieu lorsque $n < 200$, et le signe + lorsque $n > 200$.

PROB. VIII. *Déterminer l'aire d'une ellipse dont on connaît les deux axes.*

Il est démontré, dans tous les traités de calcul intégral, que l'aire d'une ellipse est équivalente à celle d'un cercle dont le rayon serait moyen proportionnel entre les deux demi-axes. Cela posé, soient $a$ et $b$ ces deux demi-axes, et $s$ l'aire cherchée, on aura

$$s = \pi ab$$

supposons que $a = 12$, et que $b = 10$, on trouvera

$$s = 3{,}14 \times 12 \times 10 = 3{,}14 \times 120 = 376^{m.c}{,}8.$$

---

## *De la mesure des polygones irréguliers.*

23. [Fig. 20.] *Déterminer l'aire du polygone irrégulier* ABCD..... *levé suivant la méthode du n°. 21.*

Ce polygone étant, par suite des opérations faites sur le terrain, décomposé en triangles et en trapèzes rectangles, on aura sa superficie ainsi qu'il suit :

| | | |
|---|---|---|
| Aire du triangle ($a$) = (11,6) (4,2). . . = | | $48^{m.c},72$ |
| du triangle ($b$) = (21,45) (6,5). . | | 139 , 42 |
| du trapèze ($c$) = (21) (7,5). . . . | | 157 , 50 |
| du trapèze ($d$) = (13,7) × 7. . . | | 95 , 90 |
| du triangle ($e$) = (19,4) (3,2). . . | | 62 , 08 |
| du triangle ($f$) = 5 × 5. . . . . | | 25 , 00 |
| du trapèze ($g$) = (13,3) (26,85). . | | 357 , 10 |
| du trapèze ($h$) = (11,1) (11,4). . | | 126 , 54 |
| du trapèze ($k$) = 9 × 5. . . . . | | 45 , 00 |
| Somme. . . . . | | $1057^{m.c},26$ |
| Triangle ($l$) soustractif = 3 × 2. . | | 6 |
| Aire effective du polygone. . . . | | $1051^{m.c},26$ |

ainsi l'aire du polygone est de 10 ares 51 mètres carrés $\frac{26}{100}$.

Si le terrain à mesurer était terminé par une ligne courbe, on abaisserait sur la base $AX$ menée intérieurement autant de perpendiculaires qu'il serait nécessaire pour pouvoir considérer, sans erreur sensible, le périmètre du terrain comme un assemblage de petites lignes droites; et le calcul de la superficie se simplifierait beaucoup en rendant toutes ces perpendiculaires équidistantes; car il est aisé de démontrer que, dans ce cas, *l'aire cherchée est égale au produit de la distance commune de ces perpendiculaires, par la somme faite de la demi-somme des perpendiculaires extrêmes, et de la somme des perpendiculaires intermédiaires.* On entend par *perpendiculaires*

*extrêmes*, celles qui passent par les extrémités de la base, et qui font partie de la limite de la figure; ainsi quand cette figure se termine en pointe aux extrémités de la base, il suffit, pour avoir la mesure de sa surface, de multiplier la somme des perpendiculaires intérieures par leur distance commune.

*Déterminer l'aire d'un polygone rectiligne quelconque mesuré au graphomètre ou au cercle répétiteur.*

[Fig. 21.] Soit le polygone *ABCDE*, dont il s'agit d'évaluer la superficie : on mesurera tous les angles intérieurs et tous les côtés de ce polygone, et la vérification des angles devra se faire sur le terrain même, afin que si on découvre une erreur on puisse la rectifier sur-le-champ. Cette vérification s'effectue à l'aide de ce principe connu, savoir : que la somme des angles intérieurs d'un polygone est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux.

Dans l'exemple actuel, on a, par l'observation,

| | | |
|---|---|---|
| angle | $A$ | $= 120^{gr}.$ |
| | $B$ | $= 132$ |
| | $C$ | $= 86,10$ |
| | $D$ | $= 118,15$ |
| | $E$ | $= 143,75$ |
| Somme | | $= 600^{gr}.$ |

laquelle est égale à celle des angles du pentagone *ABCDE*, puisque $200^{gr} \times (5-2) = 600^{gr}$.

Dans le cas où l'on aurait une faible erreur en plus ou en moins, et cela est très-ordinaire, on diminuerait

ou l'on augmenterait chaque angle de cette erreur divisée par le nombre des côtés du polygone. On suppose ici, toutefois, que les angles sont tous observés dans le même plan et aux sommets des angles du polygone ; ce qui peut presque toujours se pratiquer ainsi dans les opérations de détail, et quand le graphomètre ou le cercle répétiteur est garni de lunettes plongeantes : auquel cas son limbe se dispose toujours horisontalement ( n°. 6 ).

Il est nécessaire aussi de vérifier sur le terrain si les longueurs des côtés de la figure sont exactes. Pour cet effet, on inscrit le polygone dans le rectangle *xyzt*, dont on détermine les quatre côtés en résolvant les triangles rectangles *BCx*, *CDy*, *EDz*, *AEt*, dans chacun desquels on connaît l'hypoténuse et les angles. On est certain alors qu'il ne s'est glissé aucune erreur dans la mesure des côtés du polygone, lorsque ceux opposés du rectangle circonscrit sont égaux. Voici le calcul des côtés des triangles dont il est question.

Triangle *BCx*

| | |
|---|---|
| | 1,9860211 = 96$^{m}$,83 = *Bx* |
| log sin 32$^{gr}$. | = 9,6828250 |
| log 201$^{m}$. | = 2,3031961 |
| log cos 32$^{gr}$. | = 9,9426561 |
| | 2,2458522 = 176 , 14 = *Cx* |

Triangle *DCy*

| | |
|---|---|
| | 1,9729764 = 93 , 97 = *Cy* |
| log sin 18$^{gr}$,10 | = 9,4479316 |
| log 335$^{m}$. | = 2,5250448 |
| l. cos 18$^{gr}$,10 | = 9,9822053 |
| | 2,5072501 = 321 , 55 = *Dy* |

| | | |
|---|---|---|
| | | $2,0937867 = 124,10 = Dz$ |
| Triangle $EDz$ | log sin $36^{gr},25$ | $= 9,7317002$ |
| | log $230^{m},19$ | $= 2,3620865$ |
| | l. cos $36^{gr},25$ | $= 9,9254241$ |
| | | $2,2875106 = 193,87 = Ez$ |
| | | $1,3935725 = 24,75 = At$ |
| Triangle $EAt$ | log sin $20^{gr}$. | $= 9,4899824$ |
| | log $80^{m},09$ | $= 1,9035901$ |
| | log cos $20^{gr}$. | $= 9,9782063$ |
| | | $1,8817964 = 76,17 = Et$ |

Comme chaque côté de l'angle droit d'un triangle rectangle est égal à l'hypoténuse multipliée par le sinus de l'angle opposé à ce côté, en supposant toutefois le rayon des tables égal à l'unité, il est clair que pour avoir, 1°. le logarithme du côté $Bx$ du triangle $BCx$, il faut au logarithme de $201^{m}$. ajouter le logarithme sinus de $32^{gr}$.; 2°. que pour obtenir le logarithme du côté $Cx$, il faut de même au logarithme de 201 ajouter celui du cosinus de $32^{gr}$, et ainsi pareillement pour tous les autres triangles dont il est d'ailleurs très-facile de déterminer les angles aigus.

Il résulte de ce calcul que

$$xt = 445^{m},68, \quad yz = 445^{m},65$$
$$xy = 270,11, \quad zt = 270,04$$

On peut donc conclure de ces résultats que les mesures ont été assez bien prises.

Pour déterminer maintenant l'aire du polygone $ABCDE$, on calculera celle du rectangle $xyzt$, et on en retranchera les aires des quatre triangles $BCx$, $CDy$, $DEz$, $AEt$; le

reste, sera l'aire cherchée. Mais auparavant il faut faire disparaître les petites erreurs qui existent entre les longueurs $xt$, $yz$, et $xy$, $zt$. On prendra donc pour *longueur réduite* du rectangle $\frac{xt+yz}{2} = 445^{m},66$, et pour *largeur moyenne* $\frac{yx+zt}{2} = 270^{m},07$. On pourra ensuite augmenter $zE$ de $0^{m},03$, et diminuer $Cx$ de $0^{m},04$, parce qu'il est plus convenable de faire porter la correction sur les plus longues lignes. Quant à la correction relative à la longueur du rectangle, elle est si faible qu'il est inutile d'y avoir égard dans le calcul des triangles dont il s'agit. Cela posé, on aura, en opérant par les logarithmes, pour abréger,

| | *Logarithmes des aires.* | *Aires.* | |
|---|---|---|---|
| *Rectangle* xyzt. | | | |
| base | 2,6490037 | | |
| hauteur | 2,4314763 | | |
| | 5,0804800 | | $120359^{m.c},4$ |
| *Triangle* BCx. | | | |
| *B.* | 1,9860211 | | |
| *H.* | 2,2457594 | | |
| comp log 2 = | 9,6989700 | | |
| | 3,9307505 | $8526^{m.c},1$ | |
| *Triangle* DCy. | | | |
| *B.* | 1,9729764 | | |
| *H.* | 2,5072501 | | |
| comp log 2 = | 9,6989700 | | |
| | 4,1791965 | 15107 , 6 | |
| | | 23633 , 7 | 120359 , 4 |

*De l'autre part.* . . . 23633 , 7 120359 , 4

*Triangle* EDz.

*B.* 2,0937836
*H.* 2,2875778
comp log 2 = 9.6989700

4,0803314 12031 , 8

*Triangle* AEt.

*B.* 1,3935725
*H.* 1,8817964
comp log 2 = 9,6989700

2,9743389 942 , 6

36608$^{m.c}$,1 — 36608 , 1

Aire du polygone. . . . 83751$^{m.c}$,3

Voilà tout ce que je me suis proposé de dire ici concernant le levé des plans et le calcul des surfaces, par les méthodes les plus simples ; mais les *Traités de Géodésie* et de *Topographie*, etc., forment une doctrine complète à ce sujet, et réunissent plusieurs théories importantes que j'ai principalement développées en faveur des Ingénieurs qui exécutent de grands travaux géodésiques. Ce qui précède peut être considéré comme une introduction à ces traités (1).

(1) J'ai oublié d'avertir, dans ma *Topographie*, que les trois premières tables géodésiques qui la terminent ont été calculées en grande partie par M. Henry, d'après les formules de M. Delambre ; je m'empresse de réparer ici cette omission.

# RECUEIL

## DE DIVERSES PROPOSITIONS

## DE GÉOMÉTRIE

### RÉSOLUES OU DÉMONTRÉES PAR L'ANALYSE ALGÉBRIQUE.

# SECONDE SECTION.

## GÉOMÉTRIE A DEUX DIMENSIONS.

## CHAPITRE PREMIER.

### *De la Polygonométrie.*

24. On entend par *polygonométrie* l'art de déterminer dans un polygone rectiligne quelconque plusieurs de ses parties à l'aide de celles qui sont connues. Pour effectuer de telles opérations, il faut donc, comme pour les triangles, connaître les diverses relations qui existent entre

Digitized by Google

les côtés et les angles d'un polygone. Ces relations, qui sont autant de théorêmes fondamentaux, donnent lieu par leur combinaison à d'autres théorêmes ou propriétés de ces figures. Les premiers essais qui furent faits en ce genre sont dus à Lambert ; mais ce grand géomètre ne s'occupa que des quadrilatères, et encore se borna-t-il à indiquer la marche à suivre pour former une *tétragonométrie* complète. Après lui, d'autres savans étendirent cette théorie ; entre autres Lexell, dans deux excellentes Dissertations insérées dans les 19 et 20^mes^ volumes des *Mémoires de Pétersbourg*. Enfin, de nos jours, MM. Lhuilier de Genève et Carnot ont enrichi cette matière de leurs propres découvertes. Nous nous bornerons ici à donner quelques propositions intéressantes de la polygonométrie.

### THÉORÈME.

25. *Dans tout polygone plan, chaque côté est égal à la somme de tous les autres, multipliés chacun par le cosinus de l'angle qu'il forme avec le premier.*

[Fig. 22.] Ce théorême est évident à l'inspection de la figure ; car dans le quadrilatère $ABCD$ la base $AB$ est égale à la somme des segmens $Ad$, $dc$, $cB$, et chacun de ces segmens est égal à l'hypoténuse du triangle auquel il appartient, multipliée par le cosinus que cette ligne fait avec $AB$ ou avec sa parallèle $c'D$.

Soit donc $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$; et désignons par $(a, b)$ l'angle $ABC$, par $(a, c)$ l'angle $CDc'$, par $(a, d)$ l'angle $BAD$ ; on aura

$$a = b \cos(a, b) + c \cos(a, c) + d \cos(a, d).$$

Cette proposition, qui sert de base à la théorie que nous allons développer, n'est pas restreinte aux polygones plans, comme il est aisé de le démontrer; et l'on conçoit bien qu'elle s'applique aussi à un polygone d'un plus grand nombre de côtés que celui que nous considérons en ce moment.

Il est entendu qu'il ne s'agit, dans la formule précédente, que des angles intérieurs de la figure : alors s'il s'en trouvait d'obtus, leurs cosinus seraient négatifs. *Voyez* pour la règle des signes qui doivent affecter les lignes trigonométriques, la *Trigonométrie* de Legendre, ou celle de Lacroix.

## THÉORÈME.

26. *Dans tout polygone, la somme de ses côtés multipliés chacun par le cosinus de l'angle que forme sa direction, prise dans le sens du périmètre, avec une droite quelconque tracée à volonté dans le plan de ce polygone, est égale à zéro.*

[Fig. 23.] Soit $AX$, la droite à laquelle on rapporte tous les côtés du polygone $ABCD$, et nommons $x$ cette droite indéfinie. On aura en vertu du n°. précédent, et en faisant usage de la notation qui y est énoncée,

$$\overline{Ab} = b\cos(b, x) + c\cos(c, x) + d\cos(d, x);$$

d'un autre côté le triangle rectangle $ABb$ donne

$$\overline{Ab} = a\cos(BAX):$$

de là

$$a\cos(BAX) = b\cos(b, x) + c\cos(c, x) + d\cos(d, x);$$

mais en général $\cos(200^{gr} - x) = -\cos x$, donc

$$\cos(BAX) = -\cos(BAX') = -\cos(a, x);$$

donc

$$a\cos(a,x)+b\cos(b,x)+c\cos(c,x)+d\cos(d,x)=0.$$

Ainsi dans le calcul de cette formule, comme dans toutes celles que nous donnerons par la suite, il faut avoir égard aux signes des cosinus. La règle des signes est même sous-entendue nécessairement dans l'énoncé de la proposition actuelle, qui, sans cela, ne serait point exacte.

### THÉORÈME.

27. *Dans tout polygone, le carré d'un côté quelconque est égal à la somme des carrés de tous les autres côtés, moins deux fois les produits de tous ces autres côtés multipliés deux à deux et par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent* (1).

[Fig. 24.] Soit toujours $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$;.... on aura par le théorême précédent.

$$a = b\cos(a,b) + c\cos(a,c) + d\cos(a,d).$$
$$b = a\cos(a,b) + c\cos(b,c) + d\cos(b,d)$$
$$c = a\cos(a,c) + b\cos(b,c) + d\cos(c,d)$$
$$d = a\cos(a,d) + b\cos(b,d) + c\cos(c,d)$$

. . . . . .

Multipliant par $a$, la première de ces équations ; par $b$,

(1) Cette proposition et la précédente seraient encore vraies, quand même le polygone serait gauche.

la seconde, par $c$ la troisième, et par $d$ la quatrième; ensuite ôtant les trois derniers produits du premier, il viendra

$$a^2=b^2+c^2+d^2-2\{bc\cos(b,c)+bd\cos(b,d)+cd\cos(c,d)\}$$

résultat qui démontre la chose, et fait voir que la propriété connue du triangle obliquangle, n'est qu'un cas particulier de ce principe général.

Pour introduire dans la formule ci-dessus les angles mêmes du polygone, on remarquera que

$$\text{angle}(b,c)=C,\ \text{angle}(b,d)=C+D-200^{gr},\ \text{angle}(c,d)=D;$$

donc

$$a^2=b^2+c^2+d^2-2[bc\cos C-bd\cos(C+D)+cd\cos D].$$

La même méthode appliquée au pentagone $ABCDE$ donnerait

$$a^2=b^2+c^2+d^2+e^2-2\left[\begin{array}{l}bc\cos C-bd\cos(C+D)+be\cos(C+D+E)\\+cd\cos D-ce\cos(D+E)+de\cos E\end{array}\right]$$

équation qui a encore lieu pour tout autre polygone, quel que soit le nombre de ses côtés, et au moyen de laquelle on est en droit de conclure que si les angles d'un polygone varient d'une manière quelconque, mais que les côtés conservent leur grandeur, la somme des produits de tous ces côtés multipliés deux à deux et par le cosinus de l'angle compris sera toujours une quantité constante. En effet, en faisant $a=0$, cette propriété se manifeste tout d'abord pour le quadrilatère.

## THÉORÈME.

28. *Le double de l'aire d'une figure rectiligne quelconque est égal à la somme des produits de ses côtés, excepté un, multipliés deux à deux et par les sinus des angles qu'ils comprennent.*

[ Fig. 22. ] Désignons par $S$ l'aire du quadrilatère cherchée. Si on prolonge $CD$ et $AB$ jusqu'à leur rencontre en $O$, l'on aura

$$\text{aire } ABCD \text{ ou } S = OCB - ODA;$$

et si on fait $OA = \alpha$, $OD = \gamma$, le principe connu donnera

$$OCB = \tfrac{1}{2}(c+\gamma)(a+\alpha)\sin O$$
$$ODA = \tfrac{1}{2}\alpha\gamma\sin O;$$

pour lors

$$S = \tfrac{1}{2}(c+\gamma)(a+\alpha)\sin O - \tfrac{1}{2}\alpha\gamma\sin O$$
$$= \tfrac{1}{2}ac\sin O + \tfrac{1}{2}a\gamma\sin O + \tfrac{1}{2}\alpha c\sin O.$$

D'ailleurs le triangle $ODA$ donnant

$$\left.\begin{array}{l}\alpha : d :: \sin D : \sin O\\ \gamma : d :: \sin A : \sin O\end{array}\right\} \text{ on aura } \left\{\begin{array}{l}\alpha = \dfrac{d\sin D}{\sin O}\\ \gamma = \dfrac{d\sin A}{\sin O}\end{array}\right.$$

et la valeur de $S$ deviendra

$$S = \tfrac{1}{2}ac\sin O + \tfrac{1}{2}ad\sin A + \tfrac{1}{2}cd\sin D.$$

On peut introduire dans cette formule les angles du polygone, car

$$(a,c)=O=A+D-200^{gr},\ (a,d)=A,\ (c,d)=D;$$

donc

$$S=\tfrac{1}{2}\left\{ad\sin A-ac\sin(A+D)+cd\sin D\right\}.$$

Un procédé analogue donnerait pour l'aire du pentagone *ABCDE* [Fig. 24.],

$$S=\tfrac{1}{2}\left[\begin{array}{c} ab\sin B-ac\sin(B+C)+ad\sin(B+C+D)\\ +bc\sin C-bd\sin(C+D)+cd\sin D\end{array}\right]$$

et ainsi de même pour tous les autres polygones.

Il ne faut pas oublier, en appliquant ces formules, qu'il s'agit, comme dans les n^os^ précédens, des angles intérieurs du polygone. Le principal avantage de ces mêmes formules, c'est qu'elles dispensent de construire une figure. Elles se présenteraient sous une forme plus symétrique, relativement aux signes, si au lieu des angles intérieurs du polygone, on employait les angles extérieurs; c'est-à-dire ceux qui sont formés par un côté de la figure et le prolongement du côté suivant. Il existe d'autres méthodes pour évaluer l'aire d'un polygone, sur quoi voyez le n°. 59 et suivans du *Traité de Topographie, d'Arpentage et de Nivellement.*

*Idée de la résolution des Polygones.*

29. [Fig. 22.] Connaissant dans le quadrilatère *ABCD* les côtés *b*, *c*, *d* et les angles *A*, *D*; on demande les autres parties de ce polygone.

On voit sur-le-champ que l'ordonnée $Cc$ est égale à

$$b \sin(a, b) = c \sin(a, c) + d \sin(a, d),$$

ou bien que

$$b \sin B = d \sin A - c \sin(A + D);$$

ainsi on obtiendra immédiatement, par cette formule, la valeur de l'angle $B$.

Maintenant pour trouver le côté $a$, on aura recours à la formule

$$a \sin(b, a) = c \sin(b, c) + d \sin(b, d)$$

ou

$$a \sin B = c \sin C - d \sin(C + D)$$

qui est analogue à la précédente et dans laquelle tous les angles sont connus, puisque l'on a $(b, c) = 400^{gr} - A - B - D$; ou bien l'on emploiera la formule

$$a = b \cos(a, b) + c \cos(a, c) + d \cos(a, d)$$

démontrée au n°. 25.

De ce que l'on a

$$b \cos(a, b) = a - c \cos(a, c) - d \cos(a, d)$$

et

$$b \sin(a, b) = c \sin(a, c) + d \sin(a, d),$$

il s'ensuit qu'en divisant ces deux équations l'une par l'autre,

$$\text{tang}(a, b), \text{ ou } \text{tang } B = \frac{d \sin A - c \sin(A + D)}{a - d \cos A + c \cos(A + D)}$$

et par la même raison

$$\text{tang } A = \frac{c \sin D - b \sin (C+D)}{d - c \cos D + b \cos (C+D)};$$

Telle serait la formule dont il faudrait faire usage pour déterminer le troisième angle d'un quadrilatère, si l'on connaissait trois de ses côtés et les angles compris entre les côtés connus.

[Fig. 24.] On demande de résoudre de la même manière le pentagone *ABCDE*.

L'inspection de la figure fait assez connaître que l'on a comme ci-dessus

$$b \sin B = e \sin A - d \sin (A+E) + c \sin (A+E+D);$$

mais si au lieu de calculer *B* il fallait déduire de cette équation la valeur de l'angle *A*, on serait obligé de développer les facteurs dans lesquels cet angle se trouve engagé. On aurait, par exemple,

$$b \sin B = e \sin A - d \sin A \cos E - d \cos A \sin E + c \sin A \cos (D+E) + c \cos A \sin (D+E)$$

et après avoir substitué pour $\cos A$ sa valeur $\sqrt{1-\sin^2 A}$ on verrait que l'inconnue $\sin A$ serait donnée par une équation du second degré.

Lorsque dans l'équation précédente l'on a $b = 0$, le pentagone se change en quadrilatère, et pour lors on a

$$\text{tang } A = \frac{d \sin E - c \sin (D+E)}{e - d \cos E + c \cos (D+E)},$$

ou en employant la notation qui convient au quadri-

latère $ABCD$,

$$\text{tang } A = \frac{c \sin D - b \sin (C+D)}{d - c \cos D + b \cos (C+D)}$$

comme ci-dessus.

Tels sont quelques-uns des cas qui se présentent dans la résolution des polygones, et que l'on pourrait traiter par la simple trigonométrie, comme je l'ai fait voir ailleurs. J'engage ceux qui veulent acquérir des connaissances plus étendues sur cette matière et sur les propriétés de ces figures, à lire la Polygonométrie de Lhuilier, et sur-tout la section IV de la Géométrie de position de Carnot, ouvrage dicté par le génie géométrique, et qui est un des beaux monumens élevés à la science.

Nous allons chercher maintenant les propriétés de l'étendue, par une autre voie analytique.

# CHAPITRE II.

## *Notions préliminaires sur l'application de l'Algèbre à la Géométrie.*

### *Equation de la ligne droite, et conséquences qui en résultent.*

30. LA plupart des formules suivantes n'étant qu'une récapitulation des principaux résultats analytiques connus, nous renvoyons, pour tous les éclaircissemens que l'on pourrait desirer, aux ouvrages qui ont été publiés sur cette matière; et nous prévenons une fois pour toutes, que pour éviter les redites, les numéros qui se rapporteront au *Traité d'application de l'algèbre à la géométrie*, par Lacroix, (4e. édition) seront seulement accompagnés des deux lettres *L. C.*

Une droite qui passe par l'origine des coordonnées rectangles, a pour équation

$$y = ax$$

$a$ étant la tangente trigonométrique de l'angle formé par cette droite et par l'axe des abscisses.

L'équation d'une droite qui ne passe pas par l'origine des axes [Fig. 25.], est généralement représentée par

$$y = Ax + B,$$

la quantité toute connue $B$ étant l'ordonnée correspondante à $x = 0$.

Si le cours d'une droite est particularisé par l'équation

$$y = ax - b$$

c'est alors le cas de la Figure 26.

S'il l'est par l'équation

$$y = -ax + b$$

c'est le cas de la Figure 27.

S'il l'est par l'équation

$$y = -ax - b,$$

c'est le cas de la Figure 28.

31. L'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées est $x = a$.

De même l'équation d'une droite parallèle à l'axe des abscisses est $y = b$.

32. Une droite assujétie à passer par un point dont les coordonnées sont $\alpha$, $\beta$, et à faire avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente est $a$, a pour équation

$$y - \beta = a(x - \alpha)$$

33. Deux droites sont parallèles entre elles lorsque leurs équations sont respectivement

$$y = ax + b, \quad y = ax + b'.$$

34. Aucune des équations précédentes ne change de forme lorsque les coordonnées $x$ $y$ sont obliques; mais alors $a$, qui est le coefficient de $x$ dans ces mêmes

équations, désigne simplement le rapport d'une ordonnée à l'abscisse correspondante. Ainsi en désignant par $\rho$ une droite quelconque, par $(\rho, x)$ et $(\rho, y)$ les angles qu'elle fait respectivement avec l'axe des $x$ et celui des $y$, on a

$$a = \frac{\sin(\rho, x)}{\sin(\rho, y)} = \frac{\sin(\rho, x)}{\sin(x, y-\rho, x)},$$

et par conséquent

$$y = \frac{\sin(\rho, x)}{\sin(\rho, y)} x + b$$

est l'équation de la droite dont il s'agit, rapportée aux coordonnées obliques.

35. Deux droites représentées par les équations aux coordonnées rectangles

$$y = ax + b, \quad y = a'x + b'$$

sont perpendiculaires l'une à l'autre ; lorsque l'équation $a\,a' + 1 = 0$ a lieu ; c'est-à-dire, lorsque $a'$ est avec un signe contraire la cotangente de l'angle dont $a$ est la tangente.

36. Si l'équation d'une droite est $y = ax + b$ la longueur de la perpendiculaire abaissée sur cette droite d'un point dont les coordonnées positives sont $\alpha$, $\beta$, sera exprimée par

$$\pm \frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{1 + a^2}}$$

le signe supérieur ayant lieu pour le cas où la droite est située entre le point donné et l'axe des abscisses, et

le signe inférieur ayant lieu pour le cas où le point donné est entre la droite et l'axe des abscisses.

37. Deux droites, ou deux lignes quelconques qui se coupent, ont à leur point d'intersection les mêmes coordonnées ; ainsi on déterminera analytiquement ce point, en résolvant deux équations entre deux inconnues.

38. Lorsque deux droites qui se coupent ont pour équations

$$y = ax + b, \quad y = a'x + b'$$

et qu'elles sont rapportées à des axes rectangulaires, le cosinus de l'angle qu'elles forment entre elles est

$$\frac{1 + aa'}{\sqrt{(1 + a^2)(1 + a'^2)}};$$

le sinus du même angle est

$$\frac{a' - a}{\sqrt{1 + a^2}\sqrt{1 + a'^2}};$$

et sa tangente est

$$\frac{a' - a}{1 + aa'};$$

le rayon des tables étant égal à l'unité. Mais lorsque $a$ est négative, cette dernière expression se change en

$$\frac{a + a'}{1 - aa'}.$$

Dans le premier cas, l'angle dont il est question est

la différence des angles dont les tangentes sont $a$, $a'$; et dans le second cas, il en est la somme.

39. Il est intéressant de chercher les modifications qu'éprouvent les résultats précédens, lorsque les droites sont rapportées à des axes obliques. Parmi les moyens que l'on peut employer à cet effet, celui qui dérive de l'ingénieuse théorie développée dans le n°. 9 de la Correspondance sur l'Ecole polytechnique, par M. Le Français, capitaine au corps impérial du génie, me paraît le plus naturel et le plus élégant, et mérite d'être exposé dans les ouvrages élémentaires.

Par exemple, soit

$$\beta x = \alpha y, \quad \text{ou } \rho = \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}$$

l'équation d'une droite $\rho$, passant par l'origine des axes et rapportée à des coordonnées obliques $x$, $y$. Si $x_{(1)}\, y_{(1)}$ sont les coordonnées rectangulaires de l'extrémité de $\rho$, et si l'axe des $x_{(1)}$ coïncide avec celui des $x$, la partie de l'axe des abscisses comprise entre les ordonnées $y$ et $y_{(1)}$ sera, en vertu de la propriété du triangle rectangle,

$$x_{(1)} - x = y \cos (x, y),$$

d'où

$$x_{(1)} = x + y \cos (x, y);$$

mais les trois droites $x_{(1)}$, $y_{(1)}$ et $\rho$ formant un triangle rectangle, on aura encore

$$x_{(1)} = \rho \cos (\rho, x);$$

égalant donc ces valeurs, et faisant attention que

$x = \alpha\rho$, $y = \beta\rho$, on aura

$$\cos(\rho, x) = \alpha + \beta\cos(x, y);$$

on trouverait de même que

$$\cos(\rho, y) = \beta + \alpha\cos(x, y).$$

Puis, si de l'extrémité de $x$ on abaisse une perpendiculaire sur la droite $\rho$, cette droite sera évidemment composée des deux parties $x\cos(\rho, x)$, $y\cos(\rho, y)$; de sorte qu'on aura

$$\rho = x\cos(\rho, x) + y\cos(\rho, y);$$

partant

$$1 = \alpha\cos(\rho, x) + \beta\cos(\rho, y); \qquad (m)$$

et comme le triangle obliquangle $\rho xy$ donne

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos(x, y),$$

il est clair que l'on aura encore cette relation

$$1 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos(x, y); \qquad (n)$$

or, celle-ci devant être identique avec la précédente, il s'ensuit que leur comparaison fournit un nouveau moyen d'obtenir les valeurs de $\cos(\rho, x)$ et $\cos(\rho, y)$.

Concluons de là, que si l'équation d'une autre droite passant par l'origine, est

$$\beta' x = \alpha' y, \quad \text{ou} \quad \rho' = \frac{x}{\alpha'} = \frac{y}{\beta'},$$

on aura entre les coefficiens $\alpha'$, $\beta'$ les mêmes relations qu'entre $\alpha$, $\beta$.

Voyons maintenant quelle est l'expression du cosinus de l'angle formé par les deux droites $\rho$, $\rho'$. Si l'on désigne par $x\ y$ les coordonnées de l'extrémité de $\rho$ et par $x'\ y'$ celles de l'extrémité de $\rho'$, on aura pour le carré de la ligne qui joint ces deux points

$$\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\rho,\rho')=(x-x')^2+(y-y')^2 \\ +2(x-x')(y-y')\cos(x,y);$$

développant le second membre, ensuite substituant pour $x$, $y$, $x'$, $y'$, leurs valeurs respectives $\alpha\rho$, $\beta\rho$, $\alpha'\rho'$, $\beta'\rho'$ et réduisant à l'aide de la relation $(n)$ et de son analogue en $\alpha'$, $\beta'$, on obtiendra

$$\cos(\rho,\rho')=\alpha\alpha'+\beta\beta'+(\alpha\beta'+\alpha'\beta)\cos(x,y),$$

et par suite

$$\cos(\rho,\rho')=\alpha\cos(\rho',x)+\beta\cos(\rho',y) \\ =\alpha'\cos(\rho,x)+\beta'\cos(\rho,y).$$

Nous pouvons vérifier cette expression, car elle doit coïncider avec celle du n°. 38, lorsque les axes sont rectangulaires. En effet, il résulte de cette hypothèse, que

$$\frac{\beta}{\alpha}=\text{tang}(\rho,x)=a;\quad \frac{\beta'}{\alpha'}=\text{tang}(\rho',x)=a';$$

et que

$$\cos(\rho,y)=\sin(\rho,x);\quad \cos(\rho',y)=\sin(\rho',x);$$

Digitized by Google

ainsi l'expression dont il s'agit devient

$$\cos(\rho, \rho') = (1 + aa')\alpha \cos(\rho', x)$$
$$= (1 + aa')\alpha' \cos(\rho, x).$$

Dans la même circonstance les valeurs ci-dessus de $\cos(\rho, x)$ et $\cos(\rho', x)$ se réduisent et sont respectivement $\alpha$, $\alpha'$; donc à cause de . . . . . $\cos(\rho, x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang}^2(\rho, x)}}$, on a, comme au n°. cité,

$$\cos(\rho, \rho') = \frac{1 + aa'}{\sqrt{1 + a^2}\sqrt{1 + a'^2}}.$$

Complétons cette théorie, et dans cette vue cherchons la relation qui doit exister entre les coefficiens des équations de deux droites perpendiculaires entre elles. Pour cet effet, si nous faisons attention que la longueur de la ligne $\rho$ est la distance de l'origine à la droite perpendiculaire à cette ligne et passant par son extrémité, nous devons en conclure que l'équation de cette perpendiculaire est

$$\rho = x \cos(\rho, x) + y \cos(\rho, y).$$

Si donc, pour abréger, l'on fait

$$\cos(\rho, x) = A, \quad \cos(\rho, y) = B,$$

la relation $(m)$ sera

$$A\alpha + B\beta = 1 :$$

telle est celle qui doit règner entre $\alpha$, $\beta$, $A$, $B$ pour

que les droites données par les équations aux coordonnées obliques

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x, \quad Ax + By = \rho$$

soient perpendiculaires l'une à l'autre. On a aussi

$$A = \alpha + \beta \cos(x, y), \quad B = \beta + \alpha \cos(x, y);$$

d'où l'on voit que quand $\cos(x, y) = 0$, ces valeurs satisfont à l'équation de condition du n°. 35.

*Transformation des coordonnées.*

40. C'est sur-tout pour pouvoir discuter plus aisément les équations des courbes en les ramenant à une forme plus simple, sans cependant leur ôter rien de leur généralité, que l'on fait usage de la transformation des axes. Si l'on veut seulement changer l'origine, en laissant les nouvelles coordonnées parallèles aux primitives, on fera dans l'équation d'une ligne

$$x = t + \alpha, \quad y = u + \beta \qquad (1),$$

$\alpha$ et $\beta$ étant les coordonnées de la nouvelle origine, et $t$, $u$ les nouvelles variables comptées de ce point.

Si au contraire on ne veut changer que la direction des axes, on emploiera les formules

$$x = mt + pu, \quad y = nt + qu. \qquad (2)$$

Les quantités $m$, $n$, $p$, $q$, ont entre elles une certaine relation ( n°. 123 *L. C* ) qui fait qu'elles ne peuvent être prises toutes les quatre à volonté. Par exemple, si

les coordonnées des deux systèmes sont rectangulaires, on a

$$m^2 + n^2 = 1, \quad p^2 + q^2 = 1$$
$$mp + nq = 0, \quad n^2 + q^2 = 1$$

et de là

$$x = mt - nu, \quad y = nt + mu$$

ou

$$\left.\begin{aligned} x &= t\cos(t, x) - u\sin(t, x) \\ y &= t\sin(t, x) + u\cos(t, x) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

et réciproquement

$$\begin{aligned} t &= x\cos(t, x) + y\sin(t, x) \\ u &= y\cos(t, x) - x\sin(t, x); \end{aligned}$$

d'où l'on voit qu'en faisant dans ces dernières formules $t = 0$, $u = 0$, on aura les équations des nouveaux axes $u$ et $t$.

Si les axes primitifs étaient droits, et que les axes du second système fussent obliques, on aurait

$$\left.\begin{aligned} x &= t\cos(t, x) + u\cos(u, x) \\ y &= t\sin(t, x) + u\sin(u, x) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Pour changer à la fois l'origine et la direction des axes, il faut donc employer en général les valeurs

$$x = mt + pu + \alpha, \quad y = nt + qu + \beta. \quad (5)$$

On passe d'un système de coordonnées obliques à un système de coordonnées rectangulaires, l'origine restant d'ailleurs la même, à l'aide des formules

$$t = \frac{x\sin(u, x) - y\cos(u, x)}{\sin(u, x - t, x)}$$

$$u = \frac{y\cos(t,x) - x\sin(t,x)}{\sin(u, x-t, x)},$$

ou pour simplifier la notation,

$$t = \frac{x\sin q - y\cos p}{\sin(q-p)}, \quad u = \frac{y\cos p - x\sin q}{\sin(q-p)}; \quad (6)$$

celles-ci dérivent essentiellement des équations (4) résolues par rapport à $t$ et à $u$.

On fait encore un fréquent usage des coordonnées polaires ; et l'on sait, à cet égard, qu'en nommant $r$ le *rayon vecteur*, on a

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \qquad (7)$$

$\varphi$ étant l'angle que ce rayon fait avec l'axe des $x$. Donc réciproquement l'on parviendra à une équation entre $x$ et $y$ en substituant dans celle d'une courbe, $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pour sin $\varphi$, et $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pour cos $\varphi$.

*Des différentes formes que prennent les équations des courbes du second degré, eu égard aux axes des coordonnées auxquels ces lignes peuvent être rapportées.*

41. L'équation générale du cercle aux coordonnées rectangles est

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = r^2$$

$\alpha$ et $\beta$ étant les coordonnées du centre, et $r$ le rayon;

Lorsque l'origine est rapportée à l'extrémité du diamètre, l'équation du cercle devient

$$y^2 = 2rx - x^2,$$

et quand l'origine est au centre, on a simplement

$$y^2 + x^2 = r^2.$$

Il est facile de s'assurer que l'équation la plus générale du cercle aux coordonnées obliques est

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 + 2(y-\beta)(x-\alpha)\cos(x,y) = r^2$$

ainsi les trois équations précédentes ne sont que des cas particuliers de cette dernière.

42. L'équation générale des courbes du second degré est représentée par

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F, \qquad (1)$$

l'origine des coordonnées rectangles étant située d'une manière quelconque sur le plan de la courbe. Pour reconnaître l'espèce de courbe à laquelle cette équation se rapporte, dans le cas où les coefficiens $A$, $B$, $C$, etc. acquièrent des valeurs particulières, il suffit d'avoir égard aux trois premiers ( n^os. 120 et 128 *L. C.*). Par exemple, l'équation proposée, lorsqu'elle ne peut être décomposée en deux facteurs linéaires, est à l'ellipse, à la parabole ou à l'hyperbole, selon que $4AC$ est plus grand, égal ou plus petit que $B^2$. Mais par le moyen de la transformation des axes, il est possible de simplifier beaucoup cette équation générale. En effet, on la ramène à la forme

$$A't^2 + B'u^2 = F' \qquad (2)$$

lorsque l'origine des coordonnées est transportée au centre de la courbe, et cela en y faisant d'abord... $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$ pour faire disparaître les termes affectés de la première puissance de $x'$ et de $y'$, et ensuite en posant $x' = mt - nu$, $y' = nt + mu$ pour ôter le produit $ut$.

Ou bien elle devient par des substitutions inverses

$$A't^2 + C'u^2 - E'u = 0 ; \qquad (3)$$

ce qui place évidemment l'origine des axes sur un point de la courbe.

L'équation (2) qui appartient seulement à l'ellipse ou à l'hyperbole, selon que $A'$ et $B'$ sont ou ne sont pas affectés du même signe, devient

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = \dfrac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \\ \text{ou} \\ y^2 = \dfrac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \end{array}\right\} \text{ou bien } \begin{cases} a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \\ a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2, \end{cases}$$

$a$ et $b$ désignant les demi-axes de ces courbes.

Dans la même hypothèse, l'équation (3) qui comprend les trois courbes du second degré, se change, pour l'ellipse, en

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

et pour l'hyperbole, en

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - 2ax).$$

Nous accentuerons les lettres $a$ et $b$, quand il s'agira des équations relatives aux diamètres conjugués.

L'équation de cette dernière courbe prend une forme très-simple, quand les asymptotes sont prises pour les axes mêmes des coordonnées. En effet, on a dans ce cas

$$x'y' = M,$$

et l'on voit par là que pour que $y'$ fût nulle, il faudrait que $x'$ fût infinie. Ainsi les branches de l'hyperbole s'approchent sans cesse des asymptotes; mais elles ne les atteignent jamais.

Enfin, l'équation de la parabole, qui répond au cas où $C' = 0$ dans l'équation (3), est

$$y^2 = px$$

$p$ étant le paramètre.

*Méthode générale pour mener des tangentes aux courbes.*

43. Parmi les diverses méthodes analytiques que l'on peut choisir pour résoudre le problême des tangentes, la suivante, qui a beaucoup d'analogie avec celle que M. Lacroix a exposée, est assez remarquable par sa simplicité.

[Fig. 29.] Soient $\alpha$, $\beta$ les coordonnées positives du point $M$. L'équation de la droite cherchée sera

$$y - \beta = A(x - \alpha). \qquad (1)$$

Pour rapporter les points de la courbe $NN'$ à des coordonnées polaires, et placer en même tems en $N$

l'origine de ces coordonnées, on fera (n°. 40.)

$$x = x' + r\cos\phi, \qquad y = y' + r\sin\phi$$

ou pour abréger

$$x = x' + rp, \qquad y = y' + rq$$

$x'$ et $y'$ désignant les coordonnées du point $N$ commun à la courbe et à la sécante $NN'$.

Ces valeurs étant substituées dans l'équation

$$y^2 = mx + nx^2 \qquad (2)$$

des courbes du second ordre, on aura

$$(y' + rq)^2 = m\,(x' + rp) + n\,(x' + rp)^2.$$

Si on développait cette équation, et qu'on ordonnât par rapport à $r$, il est évident que l'on obtiendrait un résultat de la forme suivante

$$Mr^2 + Br + C = 0,$$

lequel se réduirait à

$$Mr + B = 0,$$

puisque $C$, qui est indépendant de $r$, a pour valeur $y'^2 - mx' - nx'^2$, comme il résulte du développement effectif de l'équation ci-dessus, et que cette valeur est nulle en vertu de la relation (2). Ainsi, en supposant que la partie $NN' = r$ de la droite $MN'$ s'anéantisse, cette droite sera tangente à la courbe, et résoudra la question; donc alors

$$B = 0.$$

Telle est l'équation qui exprime la condition du contact. On peut donc, dans le développement dont il s'agit, n'avoir égard qu'aux termes multipliés par la première puissance de $r$; ainsi l'on a

$$B = 2y'q - mp - 2npx' = 0,$$

d'où

$$\frac{q}{p} = A = \frac{m + 2nx'}{2y'};$$

par conséquent l'équation (1) de la tangente devient

$$y - \beta = \frac{2nx' + m}{2y'}(x - \alpha) \qquad (T)$$

Si le point $M$ était donné sur la courbe même, on aurait $\alpha = x'$ et $\beta = y'$, et pour lors l'équation précédente deviendrait, en ajoutant $mx' - mx'$ dans le second membre,

$$2yy' = x'(2nx + m) + mx.$$

44. Soit pour exemple la parabole [Fig. 30], dont l'équation est $y'^2 = px'$; on a dans ce cas, $m = p$ et $n = 0$; ainsi l'équation de la tangente à cette courbe devient, en vertu de la dernière formule ci-dessus,

$$2yy' = p(x' + x).$$

Lorsque l'on assujétit cette droite à passer par un point extérieur à la courbe et dont les coordonnées positives sont $\alpha$ et $\beta$, il est évident que l'on a

$$2\beta y' = p(x' + \alpha);$$

mais si le point par lequel doit passer la tangente $TM$ était situé dans l'angle $YAT$, l'abscisse $\alpha$ serait seule négative, et l'on aurait conséquemment

$$2\beta y' = p(x' - \alpha).$$

45. Une analyse absolument semblable à celle du n°. 43, et appliquée à l'équation

$$y'^2 = m'x'^2 + n'$$

commune à l'ellipse et à l'hyperbole, en prenant leurs centres pour origine des coordonnées, conduirait à l'équation de la tangente rapportée à la même origine : aussi trouverait-on pour cette équation

$$y - \beta = \frac{m'x'}{y'}(x - \alpha) ;$$

mais lorsque le point donné est celui de contact, on a $\alpha = x'$, $\beta = y'$, et pour lors ce résultat se change en cet autre

$$yy' = m'xx' + n,$$

après avoir ajouté du même côté $n' - n'$ et réduit.

46. Pour appliquer cette formule à des cas particuliers, soit d'abord $y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2)$, alors on a $m' = -\frac{b^2}{a^2}$, $n' = b^2$, et la substitution de ces valeurs donne

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2.$$

Lorsqu'il s'agit du cercle, on a $b = a$ ou $m' = -1$ ; ainsi l'équation de la tangente devient

$$yy' + xx' = a^2.$$

On trouve aussi, dans la même hypothèse, que $A = \frac{m'x'}{y'}$ devient $A = -\frac{x'}{y'}$.

Dans ces équations il faudrait, comme précédemment, changer $x$ en $\alpha$ et $y$ en $\beta$, si $\alpha$, $\beta$ désignaient les coordonnées d'un point particulier par lequel dût passer la tangente ; ce qui est de toute évidence.

47. Il est très-important de remarquer que l'on parviendrait encore à des résultats semblables, quand même l'axe des coordonnées, mené toujours tangentiellement à la courbe proposée ou parallélement à l'un de ses diamètres conjugués ne ferait pas un angle droit avec l'axe des abscisses ou l'autre diamètre. La raison est que les propriétés des courbes du second ordre sont les mêmes par rapport à leurs diamètres que par rapport à leurs axes ; mais dans ce cas le coefficient de $x$, dans l'équation générale de la tangente, ne doit plus être considéré comme une tangente trigonométrique (n°. 30) ; c'est au contraire une droite menée parallélement à l'axe des coordonnées par l'extrémité d'une abscisse constante prise pour unité, et terminée à la tangente à la courbe.

Voilà les préliminaires avec lesquels il est important de se familiariser, pour pouvoir comprendre les solutions ou les démonstrations des propositions qui vont suivre. Je ne m'arrêterai point à rappeler le grand nombre des propriétés dont jouissent les lignes du second ordre, parce que le *Traité d'application de l'algèbre à la géométrie*, par Lacroix ; l'*Essai de géométrie analytique*, de Biot ; l'ouvrage de Garnier, sur la même matière, etc., ne laissent rien à desirer sur ce sujet.

---

# CHAPITRE III.

## *Des Problémes déterminés, et de quelques Théorémes de géométrie.*

48. LORSQUE toutes les conditions d'un problême sont exprimées par des équations, les inconnues se trouvent nécessairement liées entre elles par les relations qu'elles ont avec les quantités données. Alors s'il existe autant d'équations distinctes qu'il y a de quantités à découvrir, le problême n'est susceptible que d'un nombre limité de solutions, et en pareil cas il est dit *déterminé*. Telles sont les questions suivantes.

PROBLÈME.

*Trouver la relation qui existe entre la droite menée du sommet d'un triangle rectiligne sur le milieu de sa base et les trois côtés de ce triangle.*

[Fig. 31.] Soit

$$AB = c, \quad AM = c', \quad BM = c'',$$
$$AP = x, \quad PM = y, \quad ME = z.$$

Les triangles rectangles $APM$, $BPM$ fourniront respectivement les équations

$$y^2 = c'^2 - x^2, \quad y^2 = c''^2 - (c - x)^2,$$

par le moyen desquelles on obtient

$$x = \frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2c};$$

$$y^2 = \frac{2c^2c'^2 + 2c^2c''^2 + 2c'^2c''^2 - c^4 - c'^4 - c''^4}{4c^2}$$

et par suite

$$BP = \frac{c^2 + c''^2 - c'^2}{2c}.$$

Lorsque $c'' > c'$, $AP$ est le plus petit segment, et l'on a

$$PE = AE - AP = \frac{c''^2 - c'^2}{2c};$$

or, à cause de $\overline{EM}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PE}^2$, on a en employant les expressions algébriques

$$z^2 = \frac{2c^2c'^2 + 2c^2c''^2 + 2c'^2c''^2 - c^4 - c'^4 - c''^4 + c'^4 - 2c'^2c''^2 + c''^4}{4c^2};$$

chassant le dénominateur et réduisant, il vient pour la relation cherchée

$$4z^2 = 2c'^2 + 2c''^2 - c^2,$$

ou bien

$$2z^2 + 2a^2 = a'^2 + a''^2,$$

en changeant $c$ en $2a$, $c'$ en $a'$ et $c''$ en $a''$.

Cette proposition, qui est la quatorzième du troisième livre de la *Géométrie* de Legendre, pourrait être sans doute résolue plus brièvement, en partant, comme l'a fait ce savant géomètre, de la propriété du triangle obliquangle; mais j'ai préféré, dans cette circonstance, remonter à

la propriété fondamentale du triangle rectangle, afin de faire directement usage des coordonnées rectangulaires.

## PROBLÈME.

49. *Etant données les trois lignes qui partent des angles d'un triangle rectiligne, et qui se terminent au milieu des côtés opposés, trouver l'expression analytique de ces côtés.*

[Fig. 32.] Soit

$$AB = 2c, \quad AC = 2c', \quad BC = 2c''$$
$$CD = d, \quad BF = d', \quad AE = d''.$$

On aura par le problème précédent les trois équations

$$\begin{aligned} 4c^2 + 4c'^2 &= 2d''^2 + 2c''^2 \\ 4c^2 + 4c''^2 &= 2d'^2 + 2c'^2 \\ 4c'^2 + 4c''^2 &= 2d^2 + 2c^2 \end{aligned}$$

ou bien

$$\left.\begin{aligned} 2c^2 + 2c'^2 &= d''^2 + c''^2 \\ 2c^2 + 2c''^2 &= d'^2 + c'^2 \\ 2c'^2 + 2c''^2 &= d^2 + c^2 \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

soustrayant la seconde de la première, puis la troisième de la première, puis la troisième de la seconde, et réduisant, on obtiendra ces trois autres équations,

$$\left.\begin{aligned} 3c'^2 - 3c''^2 &= d''^2 - d'^2 \\ 3c^2 - 3c''^2 &= d''^2 - d^2 \\ 3c^2 - 3c'^2 &= d'^2 - d^2 \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Comme l'une de celles-ci est une fonction des deux autres, il n'existe réellement que deux équations entre

les inconnues $c$, $c'$, $c''$ ; mais il n'en est pas de même lorsque l'on joint à ces dernières l'une des équations $(A)$. En prenant, par exemple, la troisième divisée par deux, on a

$$c'^2 + c''^2 = \frac{c^2 + d^2}{2}.$$

Et en divisant par 3 la première des équations $(B)$, il vient

$$c'^2 - c''^2 = \frac{d''^2 - d'^2}{3};$$

celle-ci étant combinée avec l'équation précédente, on a

$$c'^2 = \frac{3\,c^2 + 3\,d^2 - 2\,d'^2 + 2\,d''^2}{12}$$

$$c''^2 = \frac{3\,c^2 + 3\,d^2 - 2\,d''^2 + 2\,d'^2}{12}.$$

Maintenant si on substitue ces valeurs dans la troisième équation $(B)$, on obtiendra, après les réductions nécessaires,

$$9\,c^2 = 2\,d'^2 + 2\,d''^2 - d^2;$$

et l'on voit d'abord que l'on a pareillement

$$9\,c'^2 = 2\,d^2 + 2\,d''^2 - d'^2$$
$$9\,c''^2 = 2\,d^2 + 2\,d'^2 - d''^2.$$

Telles sont les équations desquelles on peut tirer les valeurs des côtés du triangle, soit par le calcul, soit par une construction géométrique (n°. 68. *L. C.*).

## THÉORÈME.

50. *Si des sommets des angles d'un triangle rectiligne quelconque, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés opposés, ces perpendiculaires se couperont toutes trois en un seul et même point.*

[Fig. 33.] Soit

$$AP = \alpha, \quad PM = \beta, \quad AP' = \alpha'$$

on aura

$$PP' = \alpha' - \alpha.$$

*Première démonstration.* 1°. L'équation de la droite $AM$, passant par l'origine des coordonnées rectangles, étant $y = \frac{\beta}{\alpha} x$, celle de la droite $P'M''$ qui lui est perpendiculaire, et qui est assujétie à passer par $P'$, sera (n°s. 32 et 35),

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}(x - \alpha') \qquad (1)$$

2°. La droite $P'M$ faisant avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente trigonométrique est $-\frac{\beta}{\alpha' - \alpha}$, la ligne $AM'$, qui est perpendiculaire à cette même droite, aura pour équation

$$y = \frac{\alpha' - \alpha}{\beta} x. \qquad (2)$$

Cela posé, si l'on attribue aux variables $x, y$ la même valeur dans les équations (1) et (2), elles représenteront les coordonnées du point $m$ d'intersection des droites $AM'$, $P'M''$; ainsi par le procédé ordinaire d'élimination l'on

trouvera que $x=a$. L'abscisse du point $m$ étant égale à celle du point $M$, il s'ensuit que les trois perpendiculaires $PM$, $AM'$, $P'M''$ se coupent au seul et même point $m$ : il en serait de même si ces perpendiculaires se coupaient au-dehors du triangle proposé.

Voici une démonstration géométrique de ce théorême.

*Seconde démonstration.* En supposant, comme ci-dessus, que les droites $BP$, $CQ$, [Fig. 34], soient respectivement perpendiculaires aux côtés $AC$, $AB$, il s'agit de démontrer que $AM$ est en même tems perpendiculaire à $BC$. Or les triangles rectangles $APB$, $AQC$ ayant l'angle commun $BAC$, sont nécessairement semblables ; par conséquent $AE=AL$, $PE=PR$, $RQ=LQ$.

Il résulte de là, et de ce que les triangles $QAL$, $QAR$ sont rectangles, que les angles $LAB$, $BAD$ sont égaux. D'ailleurs l'égalité des angles $EAC$, $CAD$ entraînant celle des arcs $CE$, $CD$, il s'ensuit que les angles $DAC$, $CBE$ sont aussi égaux. De plus les angles $ARP$, $BRM$ sont opposés par le sommet ; donc les triangles $RAP$, $BMR$ sont équiangles. Mais l'angle $RPA$ est droit ; donc l'angle $BMR$ l'est aussi ; ce qu'il fallait démontrer.

## THÉORÊME.

51. *Si on mène à volonté une parallèle à la base d'un triangle, et que par les points où cette parallèle coupe les deux autres côtés, on tire des droites aux sommets des angles opposés, elles se couperont toujours sur un point de la droite qui joint le milieu de la base et le sommet du triangle.*

[Fig. 35.] Soit

$$Ap=a, \quad Ap'=a', \quad AP'=x'$$

$$pm = \beta, \quad p'm' = \beta, \quad P'M' = y',$$

et $AP = a$;

on aura alors

$$pP = a - \alpha, \quad AB = \frac{a}{2}, \quad p'P = a - \alpha'.$$

En vertu de la notation actuelle, l'équation de la droite $AM'$ est

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x \qquad (1)$$

Celle de la droite $PM'$

$$y = -\frac{\beta}{a - \alpha'}(x - a) \qquad (2)$$

Celle de la droite $Pm$

$$y = -\frac{\beta}{a - \alpha}(x - a) \qquad (3)$$

Et celle de la droite $Am'$

$$y = \frac{\beta}{\alpha'} x. \qquad (4)$$

Pour obtenir les coordonnées du point $M'$, on combinera entre elles les équations (1) et (2), dans lesquelles on changera $x$ en $x'$, et $y$ en $y'$ ; ce qui donnera,

$$x' = \frac{a\alpha}{a - \alpha' + \alpha}, \quad y' = \frac{a\beta}{a - \alpha' + \alpha},$$

et par suite

$$BP' = AP' - AB = \frac{a(\alpha + \alpha' - a)}{2(\alpha - \alpha' + a)}.$$

D'un autre côté la droite $BM'$ étant assujétie à passer par le point $B$, milieu de $AP$, et à faire avec celle-ci

un angle dont la tangente est $\frac{P'M'}{BP'}$, son équation sera

$$y = \frac{2\beta}{\alpha + \alpha' - a}\left(x - \tfrac{1}{2}a\right) \qquad (5)$$

J'observe maintenant que pour que les droites proposées ne forment qu'une seule et même intersection, il faut qu'en ce point elles aient les mêmes coordonnées; le moyen de vérifier cette circonstance est donc de combiner deux à deux les équations des droites $Pm$, $Am'$, $BM'$. On trouve en effet que (3) et (4) donnent en même tems que (4) et (5),

$$x = \frac{a\alpha'}{\alpha' - \alpha + a}, \quad y = \frac{a\beta}{\alpha' - \alpha + a}.$$

Donc les trois droites $Pm$, $Am'$, $BM'$ sont douées de la propriété énoncée ci-dessus (1).

La proposition que l'on vient de démontrer donne lieu naturellement à la suivante :

*Si on divise en un même nombre de parties égales deux côtés d'un triangle, et que par les points de division on tire des droites aux angles opposés, celles qui se correspondent se couperont en des points qui seront*

---

(1) Les coordonnées du point $m''$ d'intersection des droites $Am'$, $Pm$ étant connues, on pourra prouver encore la proposition dont il s'agit, en cherchant l'équation de la droite qui passe par les points $M'$, $m'$: alors en faisant dans cette équation $y = 0$, on aura pour l'abscisse correspondante $AB$, $x = \frac{a}{2}$. Donc la droite $M'm''$ passe aussi par le milieu de $AP$.

*situés sur la droite passant par le milieu de la base, et par le sommet de l'angle opposé.* (Voyez la figure 36.)

On démontrerait aussi aisément que *les perpendiculaires élevées de tous ces points de division sur les côtés auxquels ils appartiennent, se coupent de deux en deux, en des points qui sont situés sur une certaine droite passant de même par le sommet du triangle.*

## PROBLÈME.

52. *Connaissant les rayons des cercles inscrits et circonscrits à un triangle, ainsi que sa hauteur, déterminer ce triangle.*

Soient $x, y, z$, les trois côtés inconnus du triangle; $h$ sa hauteur donnée; $p$ la moitié de son périmètre; $r$ et $R$ les rayons des cercles inscrits et circonscrits; enfin $s$ l'aire du triangle proposé.

On aura ces quatre équations. (n^os. 103 et 104. *L. C.*)

$$(1)\quad R=\frac{xyz}{4s},\quad (2)\quad r=\frac{2s}{x+y+z}$$

$$(3)\quad s=\frac{xh}{2},\quad (4)\quad s=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$$

desquelles on déduira facilement l'expression de la base $x$, par la méthode d'élimination suivante.

Si on introduit dans les équations (1), (2), (4), au lieu de $s$ sa valeur donnée par l'équation (3), on aura

$$(1')\quad 2hR=yz,\qquad (2')\quad \frac{x+y+z}{2}=\frac{xh}{2r}=p;$$

$$(4') \quad \frac{xh}{2} = \sqrt{\frac{xh}{2r}\left(\frac{xh}{2r}-x\right)\left(\frac{xh}{2r}-y\right)\left(\frac{xh}{2r}-z\right)}.$$

Élevant cette dernière au carré, il viendra, après avoir divisé tout par $x^2h$ et chassé les dénominateurs,

$$4r^2h = (h-2r)(xh-2yr)(xh-2zr);$$

développant le second membre, remplaçant $yz$ par sa valeur (1') et divisant par $h$, on aura

$$4r^2 = x^2h^2 - 2xhr(x+y+z) + 4xr^2(y+z) + 8hr^2R - 16r^3R;$$

substituant en outre pour $(x+y+z)$ et $(y+z)$ leurs valeurs déduites de l'équation (2') et réduisant, on obtiendra une équation de laquelle on tirera

$$x = \frac{2r\sqrt{2hR-4rR-r^2}}{h-2r}.$$

Passons maintenant à la construction de cette valeur.

[Fig. 37.] On prendra, sur le diamètre $AE$ du cercle circonscrit, la partie $AH = h-2r$; et après avoir élevé à ce diamètre la perpendiculaire $HK$, on décrira sur $AK$ comme nouveau diamètre la demi-circonférence $AHFK$; ensuite on mènera du point $K$ la corde $KF = r$; puis la droite indéfinie $AFG$; et lorsqu'on aura pris $AM = 2r$, on mènera $MG$ parallèle à la corde $FH$. Par ce moyen, l'on aura $AG = x$, ainsi qu'il est aisé de le prouver.

Il suit de là qu'en inscrivant dans le cercle $ACB$ une corde $AB = AG$, sa parallèle $PC$ menée à une distance $BP = h$ coupera la circonférence $ACB$ en deux points

$C$, $C'$, qui pourront chacun être pris à volonté pour le sommet du triangle.

M. Bossut, qui a résolu le même problême par une méthode toute différente de la précédente, fait voir que si on prenait pour inconnue le segment $AD$ formé par la hauteur $CD$ du triangle $ACB$, on aurait, pour la déterminer, à résoudre une équation du 4e. degré, (*Voyez* son *Application de l'alg. à la géom.*); ce qui vient à l'appui de la règle énoncée par Newton dans son *Arithmétique universelle*, pour parvenir à des équations qui soient les plus simples possibles; règle dont M. Lacroix a d'ailleurs fait sentir l'esprit au n°. 79 de son Traité élémentaire déja cité, et de laquelle je ne m'écarterai jamais dans ce Recueil.

Je vais démontrer actuellemant deux théorêmes très-connus, concernant le quadrilatère inscrit; dans la vue, seulement, de tirer quelques conséquences de la théorie que ce géomètre a exposée depuis le n°. 99 jusqu'au n°. 106 du même ouvrage.

## THÉORÈME.

53. *Dans tout quadrilatère inscrit, le rectangle des diagonales est égal à la somme des rectangles des côtés opposés.*

[Fig. 18.] Soient $a$, $b$, $c$, $d$ les côtés consécutifs $AB$, $BC$, $CD$, $AD$ du quadrilatère inscrit $ABCD$; $x$, $y$ les diagonales $AC$, $BD$; et représentons par $m$, $n$, $p$, les parties $AE$, $EC$, $BE$ de ces diagonales.

Puisque les quatre points $A$, $B$, $C$, $D$ sont sur une même circonférence, les cordes $AC$, $BD$ sont coupées

en parties réciproquement proportionnelles (n°. 106. *L. C*) ; ainsi $AE \times EC = DE \times BE$, ou d'après les désignations ci-dessus,

$$mn = DE \times p, \quad \text{d'où} \quad DE = \frac{mn}{p}.$$

Le cosinus de l'angle aigu $BEC$ étant désigné par $\theta$, celui de son supplément $AEB$ le sera par $-\theta$, et en vertu de la propriété du triangle obliquangle, on aura

$$a = \sqrt{(m^2 + p^2 + 2mp\theta)}$$

$$b = \sqrt{(n^2 + p^2 - 2np\theta)}$$

$$c = \frac{n}{p}\sqrt{(m^2 + p^2 + 2mp\theta)}$$

$$d = \frac{m}{p}\sqrt{(n^2 + p^2 - 2np\theta)}.$$

Multipliant la première équation par la troisième, et la seconde par la quatrième, on parviendra à ces deux produits

$$ac = \frac{n}{p}(m^2 + p^2 + 2mp\theta)$$

$$bd = \frac{m}{p}(n^2 + p^2 - 2np\theta);$$

lesquels étant ajoutés ensemble, donneront, après les opérations convenables,

$$ac + bd = (m + n)\left(p + \frac{mn}{p}\right).$$

Mais d'une part $m + n = x$ et de l'autre $p + \frac{mn}{p} = y$,

donc $$ac + bd = xy\ ;$$

résultat qui s'accorde avec l'énoncé du théorême.

## THÉORÈME.

54. *Dans tout quadrilatère inscrit, les diagonales sont entre elles comme les sommes des rectangles des côtés qui aboutissent à leurs extrémités.*

Nous appuierons notre démonstration sur ce seul principe, savoir : que le rayon du cercle circonscrit à un triangle est égal au produit des trois côtés divisé par le quadruple de l'aire de ce triangle (n°. 103. *L. C.*). Cela posé si on désigne par $R$ le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère $ABCD$ [Fig. 18], et par $s$, $s'$, $s''$, $s'''$ les aires respectives des triangles $ABC$, $ADC$, $BCD$, $BDA$, et que l'on adopte d'ailleurs la notation du n°. précédent, on aura ces quatre équations

$$R = \frac{abx}{4s}\ (1), \qquad R = \frac{cdx}{4s'}\ (2)$$

$$R = \frac{bcy}{4s''}\ (3), \qquad R = \frac{ady}{4s'''}\ (4).$$

La première étant combinée avec la seconde, il vient

$$s = \frac{abs'}{cd}. \qquad (a)$$

La troisième étant combinée avec la quatrième, on trouve

$$s'' = \frac{bcs'''}{ad}. \qquad (b)$$

De plus, si aux deux membres de l'équation (*a*), on ajoute $s'$, on aura

$$s + s' = \frac{(ab + cd)\, s'}{cd};$$

de même, si dans chaque membre de l'équation (*b*), on ajoute $s''$, on aura

$$s'' + s''' = \frac{(bc + ad)\, s'''}{ad}.$$

Mais à cause de $s + s' = s'' + s''' = ABCD$, il s'ensuit que

$$\frac{(ab + cd)\, s'}{cd} = \frac{(bc + ad)\, s'''}{ad},$$

ou bien

$$\frac{bc + ad}{ab + cd} = \frac{as'}{cs'''}.$$

Enfin les équations (2) et (4) donnant $\frac{x}{y} = \frac{as'}{cs'''}$, cette dernière devient

$$\frac{bc + ad}{ab + cd} = \frac{x}{y};$$

résultat qui démontre la proposition actuelle.

Ce théorême et le précédent donnent suffisamment de relations pour trouver les diagonales d'un quadrilatère inscrit quand on connaît ses côtés. Je n'entreprendrai point la solution de ce problême, pour laquelle on peut d'ailleurs consulter la note *V* de la Géométrie de Legendre. On y verra que ce géomètre a démontré

en outre, 1°. que l'aire du quadrilatère inscrit a, pour expression,

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

$p$ étant la moitié du périmètre.

2°. Que l'angle $ABC$, que je désignerai seulement par $B$, est donné par la formule

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}}.$$

On aurait de même l'angle $ADC$ par la formule

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} D = \sqrt{\frac{(p-c)(p-d)}{(p-a)(p-b)}};$$

or, cette expression n'étant que la précédente, prise en sens inverse, il faut en conclure (n°. 35) que les angles opposés d'un quadrilatère inscrit sont supplément l'un de l'autre.

J'aurais trop à faire si je m'imposais la tâche de donner, dans cet Ouvrage, toutes les propriétés des quadrilatères connues; mais je crois ne devoir pas encore passer sous silence celles qui suivent.

## THÉORÈME.

55. *Si quatre cercles touchent chacun, intérieurement ou extérieurement, trois côtés d'un quadrilatère plan quelconque, les centres de ces cercles seront toujours sur une même circonférence.* [Fig. 38.]

Cette proposition curieuse et nouvelle, est du genre de

celles pour la démonstration desquelles il est préférable d'employer la considération immédiate des angles. En effet, si on suppose que les quatre cercles touchent extérieurement les côtés du quadrilatère, et qu'on ait mené des droites d'un centre à l'autre; droites qui diviseront chacune en deux parties égales les angles supplémentaires de ce quadrilatère; il suffira de prouver que le nouveau quadrilatère $OO'O''O'''$ est inscriptible au cercle, c'est-à-dire que la somme de deux de ses angles opposés est égale à deux angles droits. Or, on a

$$\text{l'angle } OAD = 1^{q} - \frac{A}{2}, \quad \text{l'angle } ODA = 1^{q} - \frac{D}{2};$$

par conséquent

$$\text{l'angle } O = \frac{A+D}{2}.$$

Par la même raison

$$\text{l'angle } O'' = \frac{B+C}{2},$$

donc

$$O + O'' = \frac{A+B+C+D}{2};$$

mais

$$A+B+C+D = 4^{q},$$

donc

$$O + O'' = 2^{q}.$$

Voilà ce qu'il fallait prouver.

On démontrerait, avec la même facilite, cet autre théorême :

*Si les côtés d'un quadrilatère circonscrit touchent la circonférence aux sommets mêmes des angles d'un quadrila-*

*ière inscrit, leurs diagonales se couperont toutes au même point.*

Il ne serait pas difficile de s'assurer en outre que cette propriété se vérifie également pour l'ellipse. C'est ce que les jeunes lecteurs feront bien de démontrer eux-mêmes ; car ce serait nuire au développement de leurs facultés intellectuelles que d'insister trop sur le détail des calculs et l'application des méthodes.

## THÉORÈME.

56. *Si deux quadrilatères ont des diagonales égales, et faisant entre elles le même angle, quelle que soit d'ailleurs la manière dont elles se coupent l'une et l'autre, ces quadrilatères seront équivalens.*

[Fig. 39.] Soit

$$MM' = \delta, \quad AM = z, \quad PM = y,$$
$$NN' = \delta', \quad AM' = z', \quad P'M' = y',$$

et soit représenté par $f$ le sinus de l'angle $MAN$.

Les ordonnées $PM$, $P'M'$ sont respectivement le côté de l'angle droit des triangles rectangles $APM$, $AP'M'$, en même tems que $AM$, $AM'$ en sont les hypoténuses : ainsi d'après un théorême connu de trigonométrie, on a

$$y = fz, \qquad y' = fz'.$$

Le quadrilatère $MM'$ étant composé des deux triangles $MNN'$, $M'NN'$, son aire sera représentée par

$$\frac{y\delta + y'\delta}{2},$$

or, en substituant pour $y$ et $y'$ leurs valeurs obtenues ci-dessus, il vient

$$\delta\left(\frac{z+z'}{2}\right)f;$$

mais $z+z'=\delta'$; donc aire $M'NMN'=\frac{\delta\delta'}{2}f$;

Donc en quelque point que se coupent les diagonales $M'M$, $N'N$, pourvu qu'elles forment le même angle $MAN$, l'aire du quadrilatère sera constante. C'est ce que nous avons déja reconnu, n°. 22, Prob. III.

## PROBLÈME.

57. *Un angle aigu d'un triangle rectangle étant donné, trouver la position de l'hypoténuse, de manière que ce triangle soit équivalent à un carré donné.*

[Fig. 40.] Soit $q^2$ le carré donné, $a$ la tangente de l'angle connu $APD$, et $\alpha$ l'inconnue $AP$.

La droite $DP$ devant être assujétie à passer par un point $P$ pris sur l'axe des abscisses $AX$, son équation est

$$y=-a(x-\alpha).$$

Or, en faisant $x=0$, on a pour l'ordonnée $AD$ correspondante, $y=a\alpha$.

L'aire du triangle $ADP$ étant $\frac{AD\times AP}{2}=\frac{a\alpha^2}{2}$,

il s'ensuit que $q^2=\frac{a\alpha^2}{2}$, et que par conséquent

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{2q^2}{a}}.$$

Si la valeur positive de $\alpha$ est représentée par $AP$, et sa valeur négative par $Ap$, les triangles $APD$, $ApD$ satisferont aux deux solutions du problème proposé.

## PROBLÈME.

58. [Fig. 41.] *Par un point* M *donné de position à l'égard d'un angle connu* M'AN, *tirer une droite* MN, *de manière que l'espace triangulaire* AM'N *soit équivalent à un carré donné.*

Soient $\alpha$, $\beta$ les coordonnées rectangles du point $M$; $A$ l'origine; $q^2$ le carré donné; $a$ la tangente de l'angle $M'AN$; les inconnues $P'M' = y$ et $AN = \alpha'$. On aura

$$PN = \alpha' - \alpha.$$

L'équation de la droite $M'A$, est

$$y = ax,$$

celle de la droite $MN$, censée assujétie à passer par le point $N$, est

$$y = \frac{-\beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha').$$

Lorsque les coordonnées de ces droites seront communes, elles représenteront celles du point $M'$ de leur

intersection ; ainsi l'on aura

$$y = \frac{a\alpha'\beta}{a(\alpha' - \alpha) + \beta}.$$

Mais l'aire du triangle $A'MN$ est

$$\frac{\alpha' y}{2} = q^2;$$

et si l'on substitue dans cette expression la valeur de $y$, on aura

$$\frac{a\alpha'^2\beta}{a(\alpha' - \alpha) + \beta} = 2q^2,$$

ou bien

$$a\alpha'^2\beta = 2q^2 a\alpha' - 2q^2 a\alpha + 2q^2\beta \qquad (1)$$

Si on tirait de cette équation la valeur de $\alpha'$ on aurait un second point $N$ de la ligne cherchée, et alors le problème serait résolu ; mais comme la formule qu'il faudrait construire ou calculer pour cet effet est un peu compliquée, il sera utile de la simplifier au moyen de la considération suivante.

Puisque pour tous points $M'$ de la droite $AM'$ on a

$$\frac{y}{x} = a;$$

soit

$$a = \frac{\beta}{n};$$

dans ce cas la quantité $n$ exprimera la partie $A'P$ interceptée entre la perpendiculaire $PM$ et la ligne $A'M$ menée parallèlement à $AM'$ ; et si l'on désigne par $d$

l'intervalle $AA'$, on aura $AP$, ou $\alpha = n - d$. Ces valeurs de $a$ et $\alpha$ étant substituées dans l'équation (1), on trouvera, lorsque les réductions qui se présentent d'abord seront effectuées,

$$\alpha'^2\beta = 2q^2\alpha' + 2q^2d,$$

d'où l'on tire

$$\alpha' = \frac{q^2}{\beta} \pm \sqrt{\frac{2q^2d}{\beta} + \frac{q^4}{\beta^2}};$$

ou autrement pour la facilité de la construction

$$\alpha' = \frac{q^2}{\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{\beta} + 2d\right)\frac{q^2}{\beta}}.$$

Sur une ligne indéfinie $PQ$, élevez la perpendiculaire $AC = \beta$; prenez $CO = CM = q$; et après avoir tiré $AM$, menez-lui par le point $O$ la parallèle $ON$, qui détermine $CN$ pour la valeur de $\frac{q^2}{\beta}$, comme cela est évident par la théorie des lignes proportionnelles. Soit maintenant..... $\frac{q^2}{\beta} = m$, la valeur de $\alpha'$ se changera en

$$m + \sqrt{(m + 2d)\,m}.$$

Or, comme la partie radicale exprime une moyenne proportionnelle, on prendra $CQ = 2d$, et sur $NQ$ comme diamètre, on décrira une demi-circonférence $NVQ$; la corde $NV$ sera, par l'effet de cette construction, égale à $\sqrt{(m + 2d)\,m}$. Ainsi faisant $PN = NV$, on aura

$$PC = \alpha'.$$

Quant à la seconde valeur de $\alpha'$, il faut faire attention qu'elle satisfait au cas où l'on voudrait mener la droite $MN$ dans l'angle $A'Am$; et il peut arriver en outre que $d$ soit du côté des $x$ positives, ou que $\beta$ soit négative; toutes ces diverses circonstances du problême produisent, dans les constructions, des changemens dont il est facile de se rendre raison.

Nous observerons encore, pour dire ce qui est utile, que la solution précédente convient naturellement au problême où l'on se propose de mener par un point donné une ligne droite qui divise une figure rectiligne quelconque en deux parties qui soient entre elles dans un rapport connu; mais dorénavant, nous n'insisterons pas trop sur la manière de lire dans une formule algébrique toutes les conséquences et les constructions qui en dérivent, afin de réserver quelque chose à l'intelligence des élèves.

Voici un problême qui a beaucoup d'analogie avec le précédent, et dont la solution repose sur la considération des coordonnées obliques.

## PROBLÊME.

59. [Fig. 41.] *Par un point* M′ *donné dans un angle connu* MA′N, *mener une droite, de manière que le produit des segmens* A′M, AN *soit égal à un carré* $q^2$.

Soient $\alpha$, $\beta$ les coordonnées obliques $A'A$, $AM'$ du point $M'$; $A'$ leur origine, et $A'N = x'$.

Si l'on considère que la droite $M'N$ doit passer par le point $N$, son équation sera généralement de la forme

$y = A(x - x')$, $A$ n'étant plus une tangente trigonométrique, mais le rapport de $AM'$ à $AN$ (n°. 34); ainsi, pour le cas dont il s'agit, on a $A = \frac{\beta}{\alpha - x'}$, et l'équation de la droite $M'N$ devient

$$y = \frac{\beta}{\alpha - x'}(x - x').$$

Comme $A'M$ répond à $x = 0$, on a

$$y = \frac{\beta x'}{x' - \alpha};$$

multipliant cette valeur par $x'$ il viendra

$$\frac{\beta x'^2}{x' - \alpha} = q^2,$$

et de là

$$x' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{q^2}{\beta} \pm \sqrt{\frac{q^2}{\beta}\left(\frac{q^2}{\beta} - 4\alpha\right)}\right);$$

valeur que l'on construira par la méthode du n°. précédent.

## PROBLÈME.

60. [Fig. 42.] *Un cercle d'un rayon connu, et une ligne* CB *étant donnés de position par rapport à deux axes fixes, mener au cercle une tangente* TM *qui soit en même tems parallèle à* CB.

Soit $r$ le rayon du cercle, $a$ la tangente trigonométrique de l'angle $BCA$, $\alpha$ la distance inconnue $AT$, et $x$, $y$, les coordonnées du point de contact.

La ligne $MT$ devant être parallèle à $BC$, l'angle $MTA$ sera nécessairement égal à l'angle $BCA$; ainsi par le problême des tangentes (n°. 45), on a

$$a = \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \qquad (1)$$

comme il est facile de s'en assurer. En effet,

$$a = \frac{PM}{PT} = -\frac{x}{y}, \qquad (2)$$

puisque l'équation de la tangente $TM$ est (n°. 46)

$$\beta y + \alpha x = r^2;$$

or lorsque $\beta = 0$, elle se réduit à

$$\alpha x = r^2, \quad \text{d'où } x = \frac{r^2}{\alpha};$$

d'ailleurs l'équation du cercle donne

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

donc

$$y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

ou bien éliminant $x$ par le moyen de sa valeur précédente,

$$y = \frac{r}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - r^2};$$

ainsi, substituant pour $x$ et $y$ leurs valeurs dans l'équation (2), l'on obtient l'équation (1); et cette dernière étant résolue par rapport à $\alpha$, donne, pour la solution cherchée,

$$\alpha = \frac{r\sqrt{a^2 + 1}}{a},$$

ou autrement en désignant l'unité par $m$, afin de rendre les termes homogènes (n°. 68, *L. C.*),

$$a = \frac{r\sqrt{a^2+m^2}}{a}.$$

Pour construire cette quantité, on abaissera du point $A$ sur la droite $BC$ la perpendiculaire $AB$, et l'on mènera par l'extrémité $M$ du rayon $AM$ la tangente $MT$ qui jouira de la propriété énoncée. En effet, $CB$ étant prise pour $m$, et l'angle $ABC$ étant droit par construction, la ligne $AB$ représentera la tangente de l'angle $BCA$. De plus, à cause des parallèles $CB$, $MT$, on aura cette proportion $AB : AM :: CA : AT$, ou en termes algébriques,

$$a : r :: \sqrt{a^2+m^2} : a = \frac{r\sqrt{a^2+m^2}}{a}.$$

Il ne faut pas croire que cette solution soit particulière au problême proposé; car si la courbe donnée était une parabole, par exemple (toutes choses égales d'ailleurs), et que l'on voulût trouver les valeurs des coordonnées du point de contact, on combinerait de même l'équation $y'^2 = px'$ de cette courbe avec celle-ci

$$\frac{p}{2y'} = a,$$

qui exprime (n°. 44) la tangente trigonométrique de l'angle formé par la tangente à la courbe et l'axe des abscisses, et l'on aurait

$$x' = \frac{p}{4a^2}, \qquad y' = \frac{p}{2a}.$$

ainsi l'abscisse serait à l'ordonnée correspondante, comme le rayon des tables est au double de la tangente donnée.

## PROBLÈME.

61. *Mener une tangente commune à deux cercles donnés de grandeur et de position.* [Fig. 43.]

Soit $AA' = \delta$, $r$ le rayon du cercle $AM$, $r'$ le rayon du cercle $A'M'$, $x$ la distance inconnue $AT$, et $a$ la tangente trigonométrique de l'angle $MTA$.

Il résulte du problème précédent, et de ce que $M'T$ doit toucher les deux cercles donnés, que pour le cercle $AM$

$$a = \frac{r}{\sqrt{x^2 - r^2}},$$

et que pour le cercle $A'M'$,

$$a = \frac{r'}{\sqrt{(x+\delta)^2 - r'^2}}.$$

Egalant ces deux valeurs, et faisant disparaître les radicaux, il vient

$$\frac{r^2}{x^2 - r^2} = \frac{r'^2}{(x+\delta)^2 - r'^2}.$$

Chassant les dénominateurs, on trouve, après la réduction,

$$r^2 (x+\delta)^2 = x^2 r'^2.$$

Extrayant la racine carrée des deux membres, on a

$$xr + \delta r = \pm xr',$$

et enfin,

$$a = \frac{\delta r}{\pm r' - r} \qquad (1)$$

ce qui indique, à cause du signe ambigu $\pm$, que par deux points différens on peut mener une tangente commune à deux cercles. D'un autre côté puisque la valeur de $a$ est affectée d'un radical du second degré, il est clair qu'il est possible de mener, par un même point, deux tangentes à nn cercle; donc le problème est susceptible de quatre solutions (1).

Nous avons fait dépendre le problème actuel de celui qui précède; mais l'un et l'autre ne sont que des cas particuliers d'une question plus étendue, traitée dans l'*Application de l'algèbre à la géométrie* de Lacroix, n°. 109. Comme il convient de s'attacher de préférence

---

(1) Pour faire voir, par un nouvel exemple, que l'emploi des coordonnées obliques simplifie souvent les calculs, nous résoudrons de rechef le présent problème.

On sait (n°. 108 *L. C.*) que les rayons $AM$, $A'M'$ menés aux points de contact $M$, $M'$ de la tangente $TM$ sont parallèles entre eux; ainsi en vertu de cette propriété l'équation aux coordonnées obliques $AX$, $AY$ de cette tangente est (n°s. 32 et 34)

$$y - r' = -\frac{r' \quad r}{\delta}(x + \delta),$$

puisque d'ailleurs les coordonnées du point $M'$ sont $-\delta$ et $+r'$. Faisant ici $y = 0$, on aura comme ci-dessus

$$AT \text{ ou } x = \frac{\delta r}{r' - r}. \qquad (1)$$

Une solution analogue par les coordonnées rectangulaires serait bien moins simple, ainsi qu'on peut le vérifier.

aux solutions générales, nous passerons à l'analyse du problème suivant.

### PROBLÈME.

62. *Deux cercles étant donnés de grandeur et de position, mener une droite à travers, de manière que les parties interceptées soient égales entre elles, et à une ligne donnée* m.

[Fig. 44.] Soient

$$\left.\begin{matrix} r \\ r' \end{matrix}\right\} \text{ les rayons des cercles donnés } \left\{\begin{matrix} C \\ C'. \end{matrix}\right.$$

Faisons en outre $CC' = \delta$, $C'A = \alpha$, et désignons par $a$ la tangente de l'angle $CAB$.

Pour remplir le but que nous nous sommes proposé à la fin du n°. précédent, nous reprendrons l'expression de la tangente trigonométrique de l'angle $A$, obtenue dans le n°. 109 de l'ouvrage cité de Lacroix, et nous y ferons toutefois les changemens que nécessite notre notation. Ainsi par rapport au cercle $C$, on a pour la valeur de la tangente $CAB$

$$a = \frac{\sqrt{4r^2 - m^2}}{\sqrt{4(\alpha+\delta)^2 - 4r^2 + m^2}},$$

et par rapport au cercle $C'$, cette même tangente a pour expression,

$$a = \frac{\sqrt{4r'^2 - m^2}}{\sqrt{4\alpha^2 - 4r'^2 + m^2}}.$$

Egalant ces deux valeurs délivrées de leurs radicaux,

divisant tout par 4, et faisant pour abréger $r^2 - \frac{mb}{4} = h^2$, $r'^2 - \frac{m^2}{4} = h'^2$, on aura

$$\frac{h^2}{(a+\delta)^2 - h^2} = \frac{h'^2}{a^2 - h'^2}.$$

Chassant les dénominateurs, et réduisant, on trouve

$$h'^2 (a+\delta)^2 = a^2 h^2.$$

Extrayant la racine carrée de part et d'autre, on obtient,

$$(ah' + \delta h') = \pm ah,$$

d'où l'on tire enfin

$$a = \frac{\delta h'}{\pm h - h'} \qquad (1)$$

Cette formule, considérée seulement par rapport au signe supérieur, peut se construire de la manière suivante :

Sur les rayons $CB$, $C'B'$ des cercles donnés, décrivez des demi-circonférences ; par les points $B$, $B'$, menez les cordes $BD$, $B'D'$ égales entre elles et à la moitié de la droite $m$ donnée; et tirez les cordes $CD$, $C'D'$, qui seront les grandeurs respectives de $h$ et de $h'$.

Menez ensuite $CP$ parallèle à $C'D'$; prenez $Cq = h$, et par les points $q$, $D'$, menez jusques en $A$ la droite $qD'A$; le point $A$ sera celui par lequel devra être menée la sécante proposée.

Enfin sur $C'A$ comme diamètre, décrivez une demi-circonférence. Portez $C'D'$ de $C'$ en $d$, et tirez la droite indéfinie $Ad$ qui sera telle, que ses parties interceptées

dans les cercles, seront égales entre elles et à la ligne donnée $m$.

Mais il est à propos de remarquer que puisque la valeur de $\alpha$ ci-dessus est composée de la même manière que dans le n°. précédent, il sera tout aussi simple de décrire respectivement des centres $C$, $C'$ et avec des rayons $h$, $h'$, des cercles concentriques à ceux $CB$, $C'B'$, et ensuite de mener des tangentes communes à ces mêmes cercles; parce que ces droites seront en même tems les sécantes demandées.

Lorsque $m = 0$, les quantités $h$ et $h'$ acquièrent respectivement les valeurs $r$ et $r'$, et pour lors l'équation (1) devient

$$\alpha = \frac{\delta r'}{\pm r - r'},$$

laquelle rentre évidemment dans celles du n°. précédent, en changeant $r$ en $r'$ *et vice versâ*.

L'expression,

$$a = \frac{\sqrt{4r'^2 - m^2}}{\sqrt{4\alpha^2 - 4r'^2 + m^2}},$$

sur laquelle la solution ci-dessus est fondée, prend une nouvelle forme lorque $\alpha = r'$; pour ce cas, qui répond à celui où il s'agit de mener par l'extrémité du diamètre d'un cercle connu une corde d'une grandeur donnée $m$, on a

$$a = \frac{\sqrt{4r'^2 - m^2}}{m},$$

d'où

$$m = \frac{2r'}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

De là il est facile de démontrer analytiquement le théorême suivant, considéré dans un de ses cas particuliers.

### THÉORÊME.

63. [Fig. 45.] *Si par le sommet commun de deux courbes semblables du second degré, dont les grands axes coïncident, on mène à volonté deux droites* AB, AB′ *qui coupent ces courbes, les cordes* AB, AB′ *seront coupées en parties proportionnelles par la plus petite courbe, et par conséquent les lignes* BB′, DD′ *seront parallèles.*

Désignons par

$$M, M', m, m' \Big\} \text{ les cordes } \Big\{ AB, AB', AD, AD',$$

et fixons au point $A$ l'origine des axes rectangulaires.

Si les équations de deux courbes du second ordre sont

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= px + qx^2 \\ y^2 &= p'x + qx^2 \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

ces courbes sont nécessairement semblables. Cette vérité est une suite de ce que l'on a alors, pour l'ellipse comme pour l'hyperbole, $\frac{b^2}{a^2} = \frac{b'^2}{a'^2}$; $a$, $b$ et $a'$, $b'$ étant respectivement les demi-axes de ces mêmes courbes. La similitude dont il s'agit se manifeste donc lorsque les coefficiens de $x^2$ seulement sont égaux, et puisque pour le cas de la parabole on a $q = 0$, il s'ensuit que les paraboles sont toujours des figures semblables.

Cela posé, soient

$$y = Ax, \qquad y = A'x \qquad (2)$$

les équations des droites $AB$, $AB'$ passant par l'origine. En les combinant convenablement avec chacune des équations (1), pour avoir les coordonnées des points d'intersection, on parviendra aisément à

$$M = \frac{p}{A^2 - q}\sqrt{A^2+1},\quad M' = \frac{p}{A'^2 - q}\sqrt{A'^2+1}$$

$$m = \frac{p'}{A^2 - q}\sqrt{A^2+1},\quad m' = \frac{p'}{A'^2 - q}\sqrt{A'^2+1};$$

d'où l'on conclut sur-le-champ

$$\frac{M}{m} = \frac{p}{p'} = \frac{M'}{m'};$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ce théorême appliqué aux cercles, conduit à une solution fort élégante du problême suivant :

*Deux points étant donnés de position à l'égard d'un cercle connu, décrire un nouveau cercle qui soit tangent au premier, et qui passe par les deux points donnés.* Sur quoi l'on peut consulter les *Récréations mathématiques* d'Ozanam, nouvelle édition par Montucla, tome 1, page 377.

Ce serait encore à l'aide de ce même théorême que l'on résoudrait cet autre problême :

*Décrire un cercle tangent à deux cercles donnés, et qui passe par un point donné. Voyez* le n°. 6 de la *Correspondance* sur l'Ecole Impériale Polytechnique, où l'on trouvera en outre la solution géométrique de cette proposition : *décrire un cercle tangent à trois autres cercles donnés.*

## THÉORÈME.

64. [Fig. 46.] *Soient* CA, CA′ *deux ellipses semblables ;* C *leur centre commun ;* AB, A′B′ *leurs grands ou leurs petits axes ;* AM *une perpendiculaire à l'axe* AB ; AK *une corde de la petite ellipse, faisant un angle quelconque avec* AX ; MK′ *une corde de la grande ellipse, parallèle à* AK ; *et* MK″ *une autre corde menée de manière que l'angle* K″MY, *soit égal à l'angle* K′MY′ ; *il s'agit de prouver que* MK′ + MK″ = 2AK.

1re. *Démonstration.* Soit $AK = z$, $MK' = z'$, $MK'' = z''$ ; désignons par $a$, $b$ les demi-axes de la petite ellipse ; par $A$, $B$ ceux de la grande ellipse ; et prenons respectivement les équations

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= px + qx^2 \\ y'^2 &= p'x + qx^2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

pour celles de ces deux ellipses semblables (n°. 63), en supposant que, pour chacune, l'origine des coordonnées rectangles soit à son sommet.

Si $\varphi$ est l'angle que $z$ fait avec $AX$, on aura

$$x = z\cos\varphi, \qquad y = z\sin\varphi$$

ou simplement

$$x = zm, \qquad y = zn ;$$

ainsi la première équation (1) devient

$$z^2n^2 = pzm + qz^2m^2$$

et donne

$$z = \frac{pm}{n^2 - qm^2}$$

Pour transporter l'origine des axes du point $A'$ au point $M$, sans toutefois changer leurs directions, soit $AA' = \alpha$, $MA = \beta$; la deuxième équation (1) deviendra, à cause de $x = \alpha + x'$, $y = \beta + y'$ ;

$$(y' + \beta)^2 = p'(x' + \alpha) + q(x' + \alpha)^2 ;$$

mais le point $M$ étant sur la circonférence de l'ellipse $A'C$, on a entre $\alpha$ et $\beta$ la relation

$$\beta^2 = p'\alpha + q\alpha^2 ;$$

de là l'équation précédente se réduit à

$$y'^2 + 2\beta y' = p'x' + qx'^2 + 2\alpha q x'$$

et comme $x' = z'm$, $y' = z'n$, puisque $z'$ et $z$ sont parallèles, il s'ensuit que l'on aura

$$z'^2 n^2 + 2\beta z' n = p' z' m + 2\alpha q z' m + q z'^2 m^2$$

par conséquent

$$z' = \frac{(p' + 2\alpha q)\, m - 2\beta n}{n^2 - qm^2}.$$

Maintenant l'on remarquera que l'expression de $z''$ dérive de celle de $z'$, en y faisant simplement $n$ ou $\sin\varphi$ négatif; en effet l'angle $K''MY'$ est négatif par suite de l'hypothèse établie ci-dessus. On a donc

$$z'' = \frac{(p' + 2\alpha q)\, m + 2\beta n}{n^2 - qm^2}$$

de là

$$z' + z'' = \frac{2(p' + 2\alpha q)m}{n^2 - qm^2}.$$

Or les ellipses, étant semblables et concentriques, fournissent $p = \frac{2b^2}{a}$, $p' = \frac{2B^2}{A}$, $q = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{B^2}{A^2}$ et $\alpha = A - a$; la valeur précédente de $z' + z''$ se change donc en celle-ci

$$z' + z'' = \frac{2\left(2a\frac{B^2}{A^2}\right)m}{n^2 - qm^2} = \frac{2pm}{n^2 - qm^2},$$

donc

$$z' + z'' = 2z, \qquad C.Q.F.D.$$

Cette conséquence aurait encore lieu pour deux hyperboles semblables, puisque $p$ et $p'$ seraient négatifs, tandis que $q$ serait positif; mais elle ne se vérifierait que pour deux paraboles égales et situées comme le sont les ellipses $AC$, $A'C$.

Ce théorême est énoncé dans la *Théorie de la figure de la Terre*, par Clairaut, page 158, et sert de base à la recherche de la figure des planètes, lorsque leurs parties sont supposées homogènes. Ce grand géomètre a employé la considération de la projection orthogonale, afin de prouver que si ce théorême est vrai pour deux cercles concentriques, il l'est aussi pour deux ellipses concentriques et semblables; mais notre démonstration plus directe a toute la généralité que l'on peut desirer. En voici une autre purement géométrique.

2°. *Démonstration.* Supposons que $AS$ et $SK$ soient tangentes à la petite ellipse, $AS$ étant d'ailleurs perpen-

diculaire à l'axe $AB$. La ligne $CS$ divisera nécessairement $AK$ en deux parties égales; car on sait par la théorie de cette courbe (n°. 160. *L. C.*), que les tangentes menées par les extrémités d'une même corde, se rencontrent sur le prolongement du diamètre; $SC$ coïncide donc avec ce diamètre. D'un autre côté, puisque la corde $MK'$ est parallèle à $AK$ par construction, et que les deux ellipses sont semblables, la droite $SC$ divise aussi $MK'$ en deux parties égales au point $N'$; donc la tangente $SK$ passe par l'extrémité $K'$ de la corde $MK'$. Par la même raison si par le point $m$ on tire la corde $mk''$ parallèlement à $AK$, la ligne $SK$ passera pareillement par l'extrémité $k''$ de cette corde. Concluons de là que $Mmk''K'$ est un trapèze. Or $Am = AM$, et $mk'' = MK''$; donc comme ci-dessus, $MK'' + MK' = 2AK$.

## PROBLÈME.

65. *Un cercle étant donné de grandeur et de position dans un angle connu, trouver le centre d'un cercle qui touche à la fois les côtés de l'angle et le cercle donné.* [Fig. 47.]

Soient $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées rectangles du point $M$ situé sur la droite $AM$; $x'$ et $y'$ les coordonnées du centre $M'$ du cercle cherché; $r$ le rayon $ND$ du cercle connu, $b = PN$ l'ordonnée du centre de ce cercle; et $AN = B$.

Le cercle $P'C$ devant être tangent aux côtés $AX$, $AC$, son centre sera situé sur la droite $AM$ qui divise l'angle $CAX$ en deux parties égales; et les centres $M'$, $N$, et le point de contact $D$ seront en ligne droite. Or, entre les coordonnées des points $M$, $M'$ qui sont sur la même

droite $AM$, on aura cette relation :

$$\frac{y}{x} = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{ou} \quad \alpha y' = x'\beta. \qquad (A)$$

De plus, entre la distance $M'N$ des centres et les coordonnées de ses extrémités, on aura cette autre relation :

$$(r + y')^2 = (b - y')^2 + (a - x')^2 : \quad (B)$$

développant celle-ci, réduisant et substituant pour $y'$ sa valeur $\frac{x'\beta}{\alpha}$, tirée de la première équation, il viendra, à cause de $B^2 = a^2 + b^2$,

$$r^2 + \frac{2x'\beta r}{\alpha} = B^2 - \frac{2b\beta x'}{\alpha} + x'^2 - \frac{2a^2x'}{\alpha} ;$$

d'où l'on tire, en résolvant, par rapport à $x'$,

$$x' = a + \beta\frac{(b+r)}{\alpha} \pm \sqrt{\left(a + \beta\left(\frac{b+r}{\alpha}\right)\right)^2 - (B^2 - r^2)}.$$

Cette quantité est susceptible d'une construction très-simple et très-élégante. En effet, prenez $AQ = b + r$, et l'ordonnée $QR$ aura pour expression analytique, $\beta\frac{(b+r)}{\alpha}$ ; portez $RQ$ de $P$ en $R'$, et $AR'$ représentera la quantité rationnelle ; menez au cercle donné la tangente $AT$ qui sera égale à $\sqrt{B^2 - r^2}$, puisque $\overline{AT}^2 = \overline{AN}^2 - \overline{NT}^2$ ; prolongez indéfiniment $NT$ et faites $AS = AR'$ ; la quantité radicale sera représentée par $TS$. Enfin, prenez $SV = AS$, et $SV' = ST$ ; les parties $TV$, $VV'$ seront les deux valeurs de $x'$. La première

partie répondant au cas où le cercle donné est entre l'origine et le cercle à décrire; et la seconde, au cas où le cercle à décrire est entre le cercle donné et l'origine.

Si l'on construisait les équations (*A*) et (*B*), dont l'une appartient à une droite, et l'autre à une parabole, les coordonnées des points d'intersection de ces deux lignes seraient à la fois les deux valeurs de $x'$ et de $y'$.

## PROBLÈME.

66. *Diviser un trapèze en deux parties égales par une ligne parallèle aux deux bases.*

[Fig. 48.] Soit

$$AB = b, \qquad BD = h, \qquad AC = h',$$
$$AP = x, \qquad PM = y.$$

L'équation de la droite $CD$ étant

$$Y = \frac{h - h'}{b} X + h',$$

on a entre les coordonnées du point $M$ la relation

$$y = \frac{h - h'}{b} x + h';$$

et puisque l'aire du trapèze

$$ABCD = \frac{h + h'}{2} b,$$

que celle du trapèze

$$APMC = \frac{(h - h')\, x + 2\, bh'}{2\, b}\, x,$$

on en conclura

$$\left((h-h')x+2bh'\right)x=\frac{(h+h')b^2}{2},$$

ou bien

$$2(h-h')x^2+4bh'x=(h+h')b^2; \qquad (A)$$

d'où l'on tire

$$x=-\frac{bh'}{h-h'}\pm\sqrt{\left(\frac{h+h'}{2}+\frac{h'^2}{h-h'}\right)\frac{b^2}{h-h'}}. \qquad (B)$$

On conçoit que cette formule doit se simplifier beaucoup, lorsque l'une des bases, $h'$ par exemple, est nulle. En effet, pour le cas du triangle

$$x=\pm\sqrt{\frac{b^2}{2}};$$

mais lorsque $h=h'$, on ne peut rien conclure de l'équation $(B)$ dans l'état où elle est présentement; alors on effectuera la réduction de l'équation $(A)$, ou bien l'on procédera ainsi qu'il suit:

Changez $h$ en $h'+q$ dans la formule $(B)$, elle deviendra

$$x=\frac{-bh'\pm b\sqrt{\frac{1}{2}(2h'q+q^2+2h'^2)}}{q};$$

développez le radical par rapport aux puissances ascendantes de $q$, ce qui s'effectue par la formule du binome, ou plus commodément par la méthode des coefficiens indéterminés, et l'on aura cette série

$$x=\frac{b}{2}+\frac{bq}{8h'}+\ldots\ldots$$

Lorsque $h' = h$ on a $q = 0$, et alors tous les termes de cette série, excepté le premier $\frac{b}{2}$, s'anéantissent; d'où il suit que $x = \frac{b}{2}$, comme on devait bien s'y attendre.

*Voyez*, pour acquérir une plus ample connaissance de ce procédé d'analyse, le *Traité élémentaire du calcul différentiel*, par Lacroix, n°. 56.

Rien ne serait plus aisé que de généraliser ce problême.

## PROBLÊME.

67. *Diviser un triangle scalène en quatre parties égales, par deux lignes qui se coupent à angles droits.*

[ Fig. 49. ] Soit $AB = a$, $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées du sommet $C$ du triangle donné, $BN = z$, $AN' = z'$; on aura

$$AN = a - z;$$

et soit $BD = a - \alpha = c$, on aura

$$\text{aire } ACB = \frac{a\beta}{2}.$$

La droite $AC$ aura pour équation

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x \qquad (1)$$

la droite $CB$ $\qquad y = \frac{-\beta}{c}(x - a) \qquad (2)$

la droite $NH$ $\qquad y = A(x - a + z) \qquad (3)$

la droite $N'H'$ $\qquad y = \frac{-1}{A}(x - z') \qquad (4)$

Si l'on combine les équations (2), (3), il en résultera, pour l'ordonnée du point $H$,

$$y = Hh = \frac{A\beta z}{Ac + \beta},$$

et à cause que l'aire du triangle $NHB = \frac{ACB}{2} = \frac{\alpha\beta}{4}$, on aura

$$\frac{A\beta z^2}{Ac + \beta} = \frac{\alpha\beta}{4};$$

d'où l'on tire

$$A = \frac{\alpha\beta}{2z^2 - \alpha c}. \qquad (T)$$

Si l'on combine de même les équations (1) et (4), on obtiendra, pour l'ordonnée du point $H'$,

$$y = H'h' = \frac{\beta z'}{A\beta + \alpha},$$

et parce que l'aire du triangle $A'N'H' = \frac{ACB}{2} = \frac{\alpha\beta}{4}$, on aura

$$\frac{\beta z'^2}{A\beta + \alpha} = \frac{\alpha\beta}{2},$$

d'où

$$A = \frac{2z'^2 - \alpha\alpha}{\alpha\beta}. \qquad (T')$$

Maintenant, pour obtenir une première relation entre $z$ et $z'$, on égalera les deux valeurs de $A$ et l'on aura, après avoir chassé les dénominateurs,

$$(2z'^2 - \alpha\alpha)(2z^2 - \alpha c) = \alpha^2\beta^2; \qquad (M)$$

d'un autre côté les équations des droites $NH$, $N'H'$

deviendront, en substituant respectivement pour $A$ ses valeurs équivalentes $(T)$, $(T')$,

$$y = \frac{a\beta}{2z^2 - ac}(x - a + z),$$

$$y = \frac{-a\beta}{2z'^2 - a\alpha}(x - z'),$$

ce qui donne pour l'ordonnée du point $M$ d'intersection de ces mêmes droites

$$y = MP = \frac{a\beta z' - a^2\beta + a\beta z}{2z^2 - ac + 2z'^2 - a\alpha};$$

mais parce que

$$NN' = AN' - AN = z' - a + z,$$

et que l'aire du triangle $NMN' = N \times \frac{MP}{2} = \frac{ACB}{4}$, on aura cette autre relation entre les inconnues $z$, $z'$

$$\frac{a\beta(z' - a + z)^2}{2z^2 - ac + 2z'^2 - a\alpha} = \frac{a\beta}{4},$$

ou bien remettant pour $c$ sa valeur $a - \alpha$, et simplifiant

$$4(z' - a + z)^2 = 2z^2 - a^2 + 2z'^2,$$

ou enfin

$$2z'^2 + 2z^2 + 5a^2 - 8az' + 8zz' - 8az = 0. \quad (N)$$

Si l'on veut une solution géométrique du problème proposé, on construira séparément les courbes dont les lieux sont déterminés par les deux équations $(M)$, $(N)$;

les divers points d'intersection de ces courbes donneront les valeurs de $z$ et de $z'$, et l'on obtiendra par le moyen de l'une des équations, $(T)$, $(T')$ la position du point $M$ où devront se croiser perpendiculairement les droites $NH$, $N'H'$. On pourrait encore parvenir au même but en construisant, par la méthode exposée au n°. 172 du Traité d'application de l'algèbre à la géométrie de Lacroix, l'équation du huitième degré résultante de l'élimination de l'une des inconnues entre les équations $(M)$, $(N)$; mais il faut l'avouer, quoiqu'il soit intéressant d'examiner si les formules d'où dépend la solution d'un problême de géométrie peuvent se construire avec simplicité et élégance, les méthodes numériques d'approximation, au point où elles sont portées aujourd'hui, doivent être en général employées de préférence, parce qu'elles conduisent toujours, avec plus de précision, aux résultats que les opérations graphiques n'atteignent qu'imparfaitement.

## THÉORÊME.

68. *Trois cercles inégaux étant donnés de grandeur et de position sur un plan, si en les considérant deux à deux on leur mène des tangentes extérieures jusqu'à ce qu'elles se coupent, les trois points d'intersection, qu'on obtiendra de cette manière, seront en ligne droite.*

[Fig. 50.] Soient

$x, y$
$x', y'$ les coordonnées des points $\left\{\begin{matrix} M \\ M' \end{matrix}\right.$

$C'C''=a$, $CC''=a'$, $CC'=a'$, $r, r', r''$ les rayons des cercles $C, C', C''$
$C'M=b$, $CM'=b'$, $AC'=b''$,

et $pC''=h$, $pC'=u$.

*Première démonstration.* Par le problème du n°. 61, on a

$$C'M=b=\frac{ar'}{r''-r'},$$

$$CM'=b'=\frac{a'r}{r''-r},$$

et

$$AC'=b''=\frac{a''r'}{r-r'},$$

et comme le sinus de l'angle $pC'C''=\frac{pC''}{C'C''}=\frac{PM}{C'M}$; que le sinus de l'angle $pCC''=\frac{pC''}{CC''}=\frac{P'M'}{CM'}$; on obtient, au moyen des valeurs analytiques de ces expressions, les deux équations

$$\frac{h}{a}=\frac{y(r''-r')}{ar'},\qquad \frac{h}{a'}=\frac{y'(r''-r)}{a'r},$$

desquelles on tire

$$y=\frac{hr'}{r''-r'},\qquad y'=\frac{hr}{r''-r}.$$

Or, pour que le théorême ait lieu, il faut nécessairement que les abscisses $x$, $x'$ soient dans le même rapport que les coordonnées $y$, $y'$. On cherchera donc les valeurs de $AP$ et de $AP'$, en mêmes fonctions que celles des ordonnées $PM$, $P'M'$; pour cet effet, l'on remarquera que

le cosinus de l'angle $pC'C'' = \frac{pC'}{C'C''} = \frac{PC'}{C'M}$, et que celui de l'angle $pCC'' = \frac{pC}{CC''} = \frac{P'C}{CM'}$; ainsi ces quantités deviendront respectivement

$$\frac{u}{a} = \frac{PC'(r'' - r')}{ar'};$$

$$\frac{a'' - u}{a'} = \frac{P'C(r'' - r)}{a'r},$$

ce qui donne

$$PC' = \frac{ur'}{r'' - r'},$$

et

$$P'C = \frac{(a'' - u)r}{r'' - r}.$$

Concluons de là que

$$x = AC' - PC' = \frac{a''r'}{r - r'} - \frac{ur'}{r'' - r'},$$

et que

$$x' = AC + P'C = \frac{a''r}{r - r'} + \frac{(a'' - u)r}{r'' - r}.$$

Si l'on réduit les termes des seconds membres de ces égalités au même dénominateur, on parviendra à

$$x = \frac{r'[a''(r'' - r') - u(r - r')]}{(r - r')(r'' - r')},$$

et à

$$x' = \frac{r[a''(r'' - r) + (a'' - u)(r - r')]}{(r - r')(r'' - r)}.$$

Or, les multiplicateurs fractionnaires de $\frac{r'}{r'' - r'}$ et de

$\frac{r}{r'' - r}$ dans ces dernières expressions, étant égaux entre eux, comme on peut s'en assurer par le développement, il s'ensuit que l'on a

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} \quad ;$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

Quoique la démonstration ci-dessus ne soit pas très-compliquée, nous pensons qu'on lira avec intérêt celle que nous allons donner encore du même théorême. Pour ne pas employer sans motif une autre notation, nous ferons usage de celle qui précède, à quelques légers changemens près, qui vont être indiqués.

*Deuxième démonstration.* Par le point $C''$, [Fig. 5o.] menez parallèlement à $AX$ la droite $RC''$ que nous désignons par $d$; et supposez pour un moment que les points d'intersection $A$, $M$, $M'$ des tangentes prises deux à deux ne soient pas en ligne droite, et qu'ils forment la ligne brisée $AMm$. Faites $Cm = \beta$ et $CM' = \beta'$, et ne considérez le point $M'$ que comme l'intersection de la droite $C''C$ menée par les centres $C$, $C''$, et de la droite $AM$ menée par les points de concours $A$, $M$ des tangentes prises deux à deux.

Cela posé, les triangles semblables $RC''M'$, $ACM'$ donnent la proportion.

$$d : C''M', (a' + \beta') :: AC, (a'' + b'') : CM', (\beta'),$$

d'où $$d\beta' = (a' + \beta')(a'' + b'');$$

ou pour abréger

$$d\beta' = (a' + \beta')K,$$

et par conséquent

$$\beta' = \frac{a'K}{d - K}.$$

De plus, le point $m$ étant considéré comme le concours des tangentes communes aux cercles $C$ et $C''$, on a, en vertu des triangles semblables $C''n''m$, $Cnm$,

$$\beta = \frac{a'r}{r'' - r}, \qquad (1)$$

ainsi de cette égalité et de la précédente, on obtient, en divisant l'une par l'autre,

$$\beta(Kr'' - Kr) = \beta'(dr - Kr). \qquad (2)$$

J'observe maintenant que c'est de la coïncidence des points $m$, $M'$ que dépend la vérité du théorême proposé ; et dans ce cas, il ne s'agit que de reconnaître si l'équation

$$Kr'' - Kr = dr - Kr$$

est satisfaite, ou si

$$Kr'' = dr.$$

Pour cet effet, ayons d'abord recours à l'expression de $C'A$ qui a déjà été employée dans la première démonstration, ou que fournissent immédiatement les triangles semblables $CNA$, $C'N'A$; de l'une ou de l'autre manière, on a

$$b'' = \frac{a''r'}{r'' - r'},$$

ou

$$r = \frac{(a'' + b'')r'}{b''};$$

et par conséquent,

$$dr = (a'' + b'')\frac{dr'}{b''} = \frac{K dr'}{b''}.$$

D'un autre côté, dans le triangle $RC''M$, les lignes $RC''$, $AC'$ étant parallèles par construction, sont coupées en parties proportionnelles aux points $K$, $k$ par la droite $MK$; on a donc cette proportion,

$$AC', (b'') : RC'', (d) :: C'k : C''K.$$

Mais $$C'k : C''K :: r' : r'',$$

ainsi, $$b'' : d :: r' : r'',$$

d'où $$r'' = \frac{dr'}{b''};$$

donc $$Kr'' = \frac{K dr'}{b''};$$

donc l'équation (2) se réduit à

$$\beta = \beta';$$

donc enfin le point $m$ d'intersection des tangentes coïncide avec le point $M'$ situé sur le prolongement de la droite $AM$ (*).

---

(*) Cette proposition, due à M. Monge, peut se démontrer très-simplement par une autre considération. En effet, il est facile d'obtenir une relation entre les six quantités $a$, $a'$, $a''$, $b$, $b'$, $b''$ lorsque les trois points $A$, $M$, $M'$ [Fig. 52.] sont en ligne droite; car alors cette relation ou équation de condition étant . . . . .

Si dans l'équation (1) l'on fait $r'' = r$, on obtiendra à cause de $\beta = \beta'$,

$$\beta = \beta' = \left(\frac{a'}{0}\right);$$

quantité infinie qui annonce, non-seulement que les tangentes $M'n''$, $M'K$ sont parallèles entre elles, mais encore que la ligne $C''C$, qui joint les centres des cercles égaux, est parallèle à la droite $AM$ qui passe par les concours des tangentes communes à deux cercles inégaux [Fig. 51]. Cette proposition qui, je pense, n'avait pas été remarquée avant la première édition de cet Ouvrage, ne laisse pas d'être curieuse : on peut, d'après ce qui précède, en donner facilement une démonstration *à priori*, et nous observerons aux lecteurs familiarisés avec les considérations de la géométrie descriptive que cette même proposition conduit naturellement à la suivante :

*Si de trois sphères données de grandeur et de position, deux sont égales, la commune section du plan qui passe par les centres des trois sphères et du plan qui leur est tangent, est toujours parallèle à la droite qui joint les centres des sphères égales.*

---

$b''(ab' - a'b) = a''b(a' + b')$ ou bien $\frac{b'}{a'} = \frac{b(a'+b')}{ab' - a'b}$,

il ne s'agit que de vérifier si elle a lieu pour les valeurs des quantités qu'elle renferme; et c'est précisément ce que l'on trouve.

Si les tangentes communes à deux cercles se coupaient entre leurs centres, c'est-à-dire si elles étaient menées intérieurement à ces courbes, il y aurait toujours deux de ces points d'intersection et l'un des points $A$, $M$, $M'$ qui seraient sur une même droite. On propose de démontrer cette autre propriété.

## THÉORÈME.

69. *Si par tant de points que l'on voudra d'une droite donnée de position à l'égard d'une courbe quelconque du second ordre, on mène de deux en deux des tangentes à cette courbe, les lignes qui joindront les contacts d'un même couple de tangentes se couperont en un seul et même point, et réciproquement.*

[Fig. 53.] Soit

$$AT = \alpha, \qquad TT' = \beta,$$

$TT'$ étant la ligne donnée.

Soient en outre

$$\left.\begin{matrix} X', y' \\ x', Y', \end{matrix}\right\} \text{ les coordonnées des points } \left\{\begin{matrix} m' \\ M'. \end{matrix}\right.$$

Supposons d'abord que la courbe du second ordre soit une ellipse représentée par

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2. \qquad (1)$$

L'équation de la tangente assujétie à passer par un point dont les coordonnées positives sont $\alpha, \beta$, est, d'après le n°. 46,

$$a^2\beta y + b^2\alpha x = a^2b^2. \qquad (2)$$

Or, pour obtenir les coordonnées des points de contact, il faut attribuer à $x$ et $y$ les mêmes valeurs dans les équations précédentes. Substituant donc, dans l'équation de la courbe, la valeur de $y$ fournie par l'équation de la

tangente, on aura

$$a^4b^4 + b^4\alpha^2x^2 - 2a^2b^4\alpha x + a^2b^2\beta^2x^2 = a^2b^2\beta^2,$$

ce qui donne

$$x = \frac{a^2b^2\alpha \pm a^2\beta\sqrt{\alpha^2b^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2}}{a^2\beta^2 + \alpha^2b^2},$$

ou pour abréger,

$$x = \frac{a^2\alpha b^2 \pm a^2\beta M}{N};$$

par conséquent

$$X' = \frac{a^2\alpha b^2 + a^2\beta M}{N}, \qquad x' = \frac{a^2\alpha b^2 - a^2\beta M}{N}.$$

La forme symétrique des équations (1) et (2) peut dispenser d'effectuer une opération analogue pour déterminer les deux valeurs de $y$; car on voit bien que toutes les circonstances de ce second calcul seraient les mêmes que celles qui viennent d'avoir lieu. Ainsi en changeant dans la valeur de $x$, $\alpha$ en $\beta$ et $a$ en $b$ *et vice versâ*, on aura sur-le-champ

$$y = \frac{a^2\beta b^2 \pm \alpha b^2 M}{N},$$

par conséquent

$$Y' = \frac{a^2\beta b^2 + \alpha b^2 M}{N}, \quad y' = \frac{-a^2\beta b^2 + \alpha b^2 M}{N} \text{ (*)}.$$

(*) La valeur de $y'$ qui répond à la seconde de $y$, est prise négativement, parce que $y'$ est au-dessous de l'axe des abscisses.

Maintenant supposons, s'il est possible, que les cordes $Mm$, $M'm'$ se coupent en un point $V$ différent de $P$, celui-ci étant pris sur l'axe $AX$. On aura dans l'hypothèse que les trois points $M'$, $V$, $m'$ sont en ligne droite, la relation,

$$\frac{Y'+y'}{X'-x'} = \frac{RV}{X'-\frac{a^2}{\alpha}}. \quad (*)$$

Cette relation, au moyen des valeurs analytiques, fournira

$$VR = \frac{\alpha b^2 M - a^2\beta b^2}{N}.$$

Mais on voit, par ce qui précède, que $p'm' = y'$ est précisément égale à $VR$; donc

$$VR = p'm';$$

donc le point $V$ coïncide avec le point $P$, quel que soit d'ailleurs celui qu'on ait choisi sur la droite donnée $TT'$, pour représenter le concours des tangentes $T'M'$, $T'm'$.

Si on voulait trouver l'équation de la corde $M'm'$ qui joint les points de contact, cela serait facile en partant des valeurs précédentes de $X'$, $Y'$, $x'$, $y'$ et en ayant égard à l'observation du n°. 32; car soient $x_{(1)}$, $y_{(1)}$, les coordonnées de la droite $M'm'$, on aura,

---

(*) En effet, l'équation (2) de la tangente donne, en y faisant $y=0$, l'abscisse $AT = x = \frac{a^2}{x}$; par conséquent $x = AP = \frac{a^2}{\alpha}$.

en vertu de la notation actuelle

$$y_{(1)} - Y' = \frac{Y' + y'}{X' - x'} (x_{(1)} - x') ;$$

puis éliminant $X'$, $Y'$, $x'$, $y'$ à l'aide de leurs valeurs et réduisant, il viendra

$$a^2 \beta y_{(1)} + b^2 \alpha x_{(1)} = a^2 b^2. \qquad (3)$$

Telle est l'équation cherchée. Il est remarquable qu'elle est la même que celle (2) de la tangente $T' M'$. Pour bien concevoir que cette tangente, et la corde $M' m'$ qui sont deux lignes très-distinctes, sont néanmoins données par la même équation, il faut remarquer que dans celle (2) $\alpha$ et $\beta$ sont les coordonnées d'un point de la tangente $T' M'$ ; tandis qu'il n'en est pas ainsi par rapport à la corde $M' m'$. Il suit de là que quelle que soit l'ordonnée $\beta$, toutes les cordes telles que $M' m'$ déterminées de position par les tangentes $T' M'$, $T' m'$, couperont l'axe des $x$ au même point $P$, pourvu que l'abscisse $\alpha$ soit la même ; et en effet, la supposition de $y_{(1)} = 0$ dans l'équation (3) donne pour l'abscisse $AP$

$$x_{(1)} = \frac{a^2}{\alpha} ,$$

c'est-à-dire donne une valeur indépendante de $TT'$ ; ce qui prouve de rechef la vérité de la proposition énoncée.

Cette proposition est encore vraie pour l'hyperbole, comme cela est assez évident ; et il en est de même pour le cercle, car cette courbe n'est, comme l'on sait, qu'une ellipse dont les axes sont égaux. Enfin, on parviendrait par une analyse semblable à la démonstration

de cette même proposition pour le cas de la parabole ; mais l'on remarquera à cet égard que puisque cette courbe est dépourvue de centre, il est nécessaire de transporter l'origine des coordonnées sur un point de la courbe. On emploiera donc pour cet effet l'équation de la parabole

$$y^2 = px,$$

et celle de sa tangente

$$2\beta y = px - \alpha p,$$

obtenue au n°. 44. Combinant ensuite ces deux équations pour en déduire les coordonnées des contacts $M'$, $m'$, [Fig. 54], on aura,

$$X' = \left(\alpha + \frac{2\beta^2}{p}\right) + \frac{2\beta}{p}\sqrt{\alpha p + \beta^2} = N' + \frac{2\beta M'}{p},$$

$$x' = \left(\alpha + \frac{2\beta^2}{p}\right) - \frac{2\beta}{p}\sqrt{\alpha p + \beta^2} = N' - \frac{2\beta M'}{p},$$

$$Y' = \beta + \sqrt{\alpha p + \beta^2} = \beta + M',$$

$$y' = -\beta + \sqrt{\alpha p + \beta^2} = -\beta + M'.$$

Or, puisque les points $M'$, $V$, $m'$ sont censés en ligne droite, il faut, comme précédemment, qu'on ait la relation

$$\frac{Y' + y'}{X' - x'} = \frac{VR}{\alpha - x'};$$

ainsi il viendra, après les substitutions convenables,

$$RV = -\beta + M' = y' = RP:$$

cette dernière conséquence pourrait se déduire comme ci-dessus de l'équation

$$2\beta y_{(1)} = px_{(2)} - \alpha p$$

qui est celle de la corde $M'm'$ ; donc la propriété énoncée est commune à toutes courbes du second ordre.

On serait peut-être tenté de croire que notre démonstration repose essentiellement sur la condition de la perpendicularité des lignes $AX$, $TT'$ ; mais si l'on se rappelle ce que nous avons dit au n°. 47, la ligne $TT'$ peut être oblique à l'axe, sans que les conclusions deviennent différentes de celles que nous avons tirées. Il faut seulement rapporter le système des coordonnées aux diamètres des courbes du second ordre, de manière que les ordonnées soient parallèles à la ligne $TT'$.

## PROBLÈME.

70. [Fig. 55.] *Deux points* B, C *étant donnés de position à l'égard d'un cercle connu, trouver sur la circonférence un point* M, *duquel menant au centre* A, *et aux points donnés les droites* AM, MB, MC, *les sinus des angles*, AMB, AMC *soient entre eux dans le rapport de* m : n.

Joignez les points donnés par la droite $BC$, et du point $A$, centre du cercle donné, abaissez sur cette droite la perpendiculaire $AY$, que vous prendrez pour

l'axe des ordonnées, et menez la droite $AX$ parallèle à $BC$, ce qui ne peut manquer de simplifier les calculs. Enfin des points $B$, $C$, abaissez sur $AX$ les perpendiculaires $BH$, $CK$.

Maintenant soit

$$AH = \alpha, \quad AK = \alpha', \quad BH = CK = \beta,$$

et $x$, $y$ les coordonnées du point $M$ cherché.

La droite $BM$ qui doit passer par un point $B$ dont les coordonnées sont $\alpha$, $\beta$, forme avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente $A$ a pour expression

$$A = -\frac{\beta - y}{\alpha + x}.$$

De même la droite $MC$ forme avec l'axe $AX$ un angle dont la tangente est

$$A' = \frac{\beta - y}{\alpha' - x}.$$

Enfin, la tangente $A''$ de l'angle produit par la droite $AM$ et l'axe des abscisses s'exprime par

$$A'' = \frac{y}{x}.$$

Or, selon le numéro 38, le sinus de l'angle $M'MC$, formé par les deux droites $AM$, $MQ$, a pour expression,

$$\frac{(A'' - A')}{\sqrt{1 + A'^2}\sqrt{1 + A''^2}},$$

$a'$ et $a$ étant ici représentées par $A''$, $A'$.

Concluons de là que sinus $CMA$, ou

$$\text{sinus } M'MC = \frac{y(\alpha'-x)-x(\beta-y)}{\sqrt{(\alpha'-x)^2+(\beta-y)^2}\,\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Par la même raison, si l'on substitue $A$ à la place de $A'$, et que l'on fasse usage des valeurs analytiques rapportées plus haut, on obtiendra sin $BMA$,

$$\text{ou} \qquad \sin AMN = \frac{y(\alpha+x)+(\beta-y)}{\sqrt{(\alpha+x)^2+(\beta-y)^2}\,\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Mais, suivant l'énoncé du problème, on doit avoir cette proportion

$$\sin AMB : \sin AMC :: m : n,$$

d'où

$$m \sin AMC = n \sin AMB.$$

Mettant dans cette équation, au lieu de sinus $AMC$, et de sinus $AMB$, leurs valeurs calculées ci-dessus, on aura, après s'être débarrassé des dénominateurs, et avoir simplifié,

$$(\alpha' ny - \beta nx)\sqrt{(\alpha+x)^2+(\beta-y)^2},$$

$$= (\alpha my + \beta mx)\sqrt{(\alpha'-x)^2+(\beta-y)^2}. \qquad (1)$$

Si l'on combinait cette équation avec celle du cercle donné

$$x^2+y^2 = r^2. \qquad (2)$$

on arriverait à une équation du sixième degré en $x$, et en appliquant le procédé du n° 172 (*L. C.*) on obtien-

drait l'abscisse *AP* du point cherché (*). C'est à ce résultat qu'est parvenu Descartes dans la soixante-cinquième de ses Lettres, tom. 3. Il est remarquable que la solution de ce problême dépend d'une manière bien simple de celle de cette question :

*Trois points* A, B, C *étant donnés* [Fig. 56], *soient décrites des circonférences sur les distances* AB, AC *prises pour diamètres, et du point* A *soient menées tant de cordes* AE, AD *que l'on voudra, mais qui soient toujours entre elles dans le même rapport; on demande la nature de la courbe sur laquelle se trouveront les points* M *d'intersection des droites* EC, BD.

Si l'on appliquait convenablement l'analyse précédente à ce problême, et que l'on prît *AD* et *AE* dans le rapport de $m : n$, c'est-à-dire de sin *AMB* : sin *AMC*, on retomberait sur l'équation (1) : d'où il suit que lorsque l'intersection des droites *EC*, *BD* s'effectuera sur la circonférence du cercle donné, le point *M* sera celui qui satisfait à la première proposition; et c'est ce qu'il est facile de voir d'abord sans faire aucun calcul.

On démontrerait fort aisément, par la méthode des *minimis*, qu'une bille allant de *B* en *C* en frappant la bande circulaire *M* doit parcourir une ligne brisée *BMC*, telle que les angles *BMA*, *CMA* soient égaux.

---

(*) Il n'est peut-être pas inutile de prévenir que les quantités renfermées sous les radicaux de l'équation (1) sont susceptibles d'être simplifiées au moyen de l'équation (2); et c'est ce qui fait que l'équation finale en $x$ n'est que du sixième degré.

## PROBLÈME.

71. *Etant donné un point lumineux d'où partent des rayons divergens qui viennent frapper une surface sphérique réfringente, trouver le point de concours de chaque rayon réfracté avec l'axe de la sphère qui passe par le point lumineux, connaissant d'ailleurs la direction des rayons incidens.*

[Fig. 57.] Soient les lignes connues $AC = a$, $BC = r$, $CP = p$, $PM = q$; et l'inconnue $CX = z$.

Si on prend le point lumineux $A$ pour l'origine des axes rectangles, l'équation du rayon incident $AM$ sera

$$y = \frac{q}{a - p}\, x,$$

et celle du rayon réfracté $MX$,

$$y = -\frac{q}{z + p}\,(x - a - z).$$

De plus entre $p$ et $q$ on aura la relation

$$p^2 + q^2 = r^2.$$

Cela posé, puisque les perpendiculaires $CE$, $CF$ partent du point $C$ situé sur l'axe des abscisses, on aura (n°. 36) par rapport au premier rayon,

$$CE = \frac{-a\,a}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{-a\sqrt{r^2 - p^2}}{\sqrt{a^2 - 2\,a\,p + r^2}},$$

et par rapport au rayon réfracté.

$$CF = \frac{-a\alpha - b}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{-z\sqrt{r^2-p^2}}{\sqrt{z^2+2pz+r^2}}.$$

or le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction étant censé connu, on a $CE : CF :: \alpha : k$. On déduira donc de là, et des valeurs analytiques précédentes,

$$\frac{k}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha p+r^2}} = \frac{z}{\sqrt{z^2+2pz+r^2}};$$

et si, pour abréger, on fait $m = \frac{k^2}{\alpha}$, $\alpha + \frac{r^2}{\alpha} - m = n$,

on tirera de cette équation

$$z = \frac{mp + \sqrt{m^2p^2 - 2mrp + mnr^2}}{n-2p}.$$

Ainsi quand on aura la direction du rayon incident $AM$, on connaîtra le point $M$ ; et à l'aide de cette valeur de $z$, on aura le point $X$ de concours du rayon réfracté $MX$ avec l'axe $AX$.

Le problême que nous venons de résoudre est le 31^e^. de l'*Arithmétique universelle*. L'illustre auteur de cet immortel ouvrage l'a résolu par la comparaison des triangles semblables que présente la construction de la figure, et il est parvenu au résultat précédent. Selon cette figure les rayons incidens sont divergens et passent dans un milieu plus dense ; mais s'il arrivait le contraire, le procédé de calcul serait encore le même, en ayant égard toutefois à la différence des conditions.

## PROBLÈME.

72. [Fig. 58.] *Un point* M *étant donné de position dans un angle connu* BAX, *trouver les coordonnées du centre d'un cercle tangent à la droite* AX, *qui passe par le point* M *et qui coupe le côté* AB, *de manière que la partie* m m′ *interceptée dans le cercle soit d'une grandeur donnée.*

Soient $\alpha$, $\beta$ les coordonnées du point $M$;

$$mm' = 2p,$$

la tangente de l'angle $BAX = a$.

Soient en outre

$$\left.\begin{matrix}\alpha' \\ \beta'\end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix}x \\ y\end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix}x' \\ y'\end{matrix}\right\}$$

les coordonnées des points

$$M', \qquad m, \qquad m';$$

et puisque le cercle doit être en contact avec $AX$, son rayon sera égal à $\beta'$.

L'équation du cercle cherché, pour un point quelconque de sa circonférence, est (n°. 41)

$$(x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 = \beta'^2, \qquad (1)$$

et pour le point donné

$$(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 = \beta'^2; \qquad (2)$$

de plus la droite $AB$ est donnée par

$$y = ax, \qquad (3)$$

et par rapport à la distance $m\,m'$ on a

$$4p^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 \qquad (4)$$

Toutes les conditions du problême étant exprimées par des équations, et celles-ci étant en nombre suffisant pour déterminer les inconnues, on obtiendra une équation finale en $\alpha'$ ou en $\beta'$. Voici le détail de l'élimination.

Les équations (1) et (3) étant accordées ensemble donneront les valeurs de $x$, $y$ et de $x'$, $y'$, c'est-à-dire, les coordonnées des points d'intersection $m$, $m'$; parce qu'en général une droite coupe la circonférence en deux points. On trouve en effet,

$$x = \frac{a\beta' + \alpha' \pm \sqrt{a^2\beta'^2 - a^2\alpha'^2 + 2a\alpha'\beta'}}{1 + a^2},$$

et

$$y = \frac{a\alpha' + a^2\beta' \pm a\sqrt{a^2\beta'^2 - a^2\alpha'^2 + 2a\alpha'\beta'}}{1 + a^2}.$$

Or, si l'on désigne seulement par $x$, $y$ les valeurs de ces expressions relatives aux signes supérieurs des radicaux, et par $x'$, $y'$ les valeurs prises par rapport aux signes inférieurs, on aura, après avoir éliminé $x$, $y$, et $x'$, $y'$ de l'équation (4), et chassé le dénominateur,

$$4p^2(a^2+1)^2 = 4a^2\beta'^2(a^2+1) - 4a^2\alpha'^2(a^2+1) + 8a\beta'(a^2+1)\alpha',$$

ou bien simplifiant, et faisant pour abréger,

$$a^2 + 1 = m^2,$$

on trouvera

$$p^2m^2 = a^2\beta'^2 - a^2\alpha'^2 + 2a\alpha'\beta' \text{ (*)}. \qquad (A)$$

Faisant passer le terme $a^2\alpha'^2$ dans le premier membre, ajoutant $\alpha'^2$ de part et d'autre, on aura

$$p^2m^2 + \alpha'^2(a^2 + 1) = a^2\beta'^2 + 2a\alpha'\beta' + \alpha'^2.$$

Enfin, extrayant la racine carrée, et faisant attention que $a^2 + 1 = m^2$; il viendra

$$m\sqrt{\alpha'^2 + p^2} = a\beta' + \alpha'.$$

J'observe maintenant que de l'équation (2) on tire, en désignant $\alpha^2 + \beta^2$ par $\gamma^2$,

$$\beta' = \frac{\gamma^2 + \alpha'^2 - 2a\alpha'}{2\beta}. \qquad (B)$$

---

(*) On parviendrait d'abord à ce résultat, si on voulait partir de cette considération, que dans le cercle, toute perpendiculaire $M'N$ abaissée du centre $M'$ sur une corde $mm'$, divise cette corde en deux parties égales. En effet, les coordonnées du point $M'$ étant désignées par $\alpha'$, et $\beta'$, l'expression de la perpendiculaire $M'N$ sera par le n°. 36, $-\frac{\beta' - a\alpha'}{\sqrt{1 + a^2}}$ ou $\frac{a\alpha' - \beta'}{\sqrt{1 + a^2}}$; et à cause de $mN = p$ et de $mM' = \beta$, le triangle rectangle $mNM'$ fournira cette relation entre ses côtés, $\frac{(a\alpha' - \beta')^2}{1 + a^2} + p^2 = \beta^2$, laquelle étant développée deviendra identique avec le résultat dont il est question.

Ainsi substituant cette valeur dans l'équation précédente, il en résultera, après avoir chassé le radical et le dénominateur, et ordonné par rapport à l'inconnue $\alpha'$,

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l} a^2\alpha'^4+4a\beta & \alpha'^3+4(\beta^2-2a\alpha\beta+a^2\alpha^2) & \alpha'^2+4a\beta\gamma^2 & \alpha'+a^2\gamma^4 \\ -4a^2\alpha & +2a^2\gamma^2 & -4a^2\alpha\gamma^2 & -4\beta^2m^2p^2 \\ & -4\beta^2m^2 & & \end{array}\right\}=0,$$

d'où l'on voit que la valeur de l'abscisse $\alpha'$ du point de contact cherché dépend d'une équation du quatrième degré; mais pour donner à cette équation une forme un peu plus simple, nous rendrons d'abord tous ses termes homogènes, en restituant partout où il en sera besoin, les puissances de l'unité qui peut être prise arbitrairement (n°. 71. *L. C.*). Pour cet effet, soit $1=\alpha$, on aura en vertu du principe de l'homogénéité,

$$\left.\begin{array}{l|l} a^2\alpha'^4+4(a\alpha\beta-a^2\alpha)\alpha'^3+4(\alpha\beta-a\alpha)^2 & \alpha'^2+4\gamma^2(a\alpha\beta-a^2\alpha)\alpha'+a^2\gamma^4 \\ +2a^2\gamma^2 & -4\beta^2m^2p^2 \\ -4\beta^2m^2 & \end{array}\right\}=0;$$

Divisant tout par $a^2$, et posant pour plus de commodité

$$\frac{\alpha\beta}{a}=e, \qquad \frac{\beta m}{a}=f,$$

il viendra enfin,

$$\left.\begin{array}{l|l} \alpha'^4+4(e-\alpha)\alpha'^3+4(e-\alpha)^2 & \alpha'^2+4\gamma^2(e-\alpha)\alpha'+\gamma^4 \\ +2\gamma^2 & -4f^2p^2 \\ -4f^2 & \end{array}\right\}=0.$$

Il est très-remarquable que cette dernière équation obtenue par une méthode vraiment analytique est la même que celle à laquelle d'autres auteurs sont parvenus à l'aide de quelques constructions préparatoires. (*Voyez* à ce sujet la *Géométrie* de Bossut, page 345.) Il y a plus, c'est que ces constructions qu'il a fallu d'abord imaginer, sont indiquées par les valeurs mêmes de $e$ et de $f$; car si par le point donné $M$ on mène respectivement aux droites $AF$, $AP$ les parallèles $DM$, $ME$, les parties $DP$, $AE$, auront pour expression

$$\frac{\alpha\beta}{a} \text{ et } \frac{\beta m}{a};$$

la ligne $PF$ étant considérée toutefois comme la tangente de l'angle $A$. Cette conformité de résultats est donc une preuve de la généralité de la méthode que nous employons dans cet Ouvrage.

Sans chercher à construire l'équation finale en $\alpha'^4$, on peut résoudre graphiquement le problême, en construisant d'une part l'équation $(A)$ et de l'autre l'équation $(B)$; parce que le nombre des intersections de ces deux courbes déterminera le nombre des cercles susceptibles de satisfaire à la question. De cette manière les solutions graphiques sont souvent plus élégantes que par l'autre méthode.

On peut aussi résoudre les équations à l'aide des tables de logarithmes et de celles des sinus; mais nous ne donnerons aucun exemple de ce genre; nous indiquerons seulement la *Trigonométrie* de Cagnoli, qui ne laisse rien à desirer à ce sujet, et nous terminerons ce chapitre par la démonstration d'une des plus belles propriétés du cercle.

## THÉORÈME.

73. *Si à partir de l'extrémité* (o) *du diamètre d'un cercle de rayon* a, *l'on divise la circonférence en* 2m *parties égales, et que l'on désigne par* (1), (2), (3)... *tant les points de division qui sont d'un côté que ceux qui sont de l'autre côté du diamètre;* ensuite *que d'un point extérieur pris sur le prolongement de cette ligne, du côté de son extrémité* (o), *et à une distance* x *du centre, on mène au premier système de points de division les droites* $f_{(1)}$ $f_{(2)}$ $f_{(3)}$... *et au second système les droites* $s_{(1)}$ $s_{(2)}$ $s_{(3)}$..., *le produit de toutes les droites* $f_{(0)}$ $f_{(1)}$ $f_{(4)}$... $s_{(2)}$ $s_{(4)}$... *correspondantes aux numéros pairs sera égal à* $x^m - a^m$, *et le produit de toutes les droites correspondantes aux numéros impairs sera égal à* $x^m + a^m$.

Pour démontrer cette proposition, connue sous le nom de *Théorême de Cotes*, cherchons quelles sont les formes qu'affectent les racines des équations $x^m - a^m = 0$, et $x^m + a^m = 0$.

D'abord il est démontré (p. 351, *Trigon.* de Legendre) que

$$(\cos\phi + \sin\phi\sqrt{-1})^m = \cos m\phi + \sin m\phi\sqrt{-1};$$

or, si on fait $x = a(\cos\phi + \sin\phi\sqrt{-1})$, on aura

$$x^m = a^m(\cos m\phi + \sin m\phi\sqrt{-1});$$

et si on met cette valeur dans l'équation $x^m - a^m = 0$, on obtiendra

$$\cos m\phi + \sin m\phi\sqrt{-1} - 1 = 0.$$

Pour que cette dernière ait lieu, il faut nécessairement que la partie imaginaire s'anéantisse d'elle-même ; alors

$$\cos m\varphi = 1, \qquad \sin m\varphi = 0.$$

Il existe une infinité de valeurs qui satisfont à cette seconde condition, $\sin m\varphi = 0$ : en effet, on peut faire $m\varphi = z\pi$, $z$ étant un nombre entier et $\pi$ deux angles droits. Mais la première condition exigeant que le cosinus de $m\varphi$ soit égal au rayon, il faut en outre que l'arc $m\varphi$ soit un multiple pair de la demi-circonférence, c'est-à-dire, que l'on ait $z = 2n$, d'où $\varphi = \frac{2n\pi}{m}$ ; donc

$$x = a\left(\cos\frac{2n\pi}{m} \pm \sin\frac{2n\pi}{m}\sqrt{-1}\right),$$

est l'expression générale des $m$ racines de l'équation $x^m - a^m = 0$. Nous n'avons pas besoin de démontrer que lorsque $m$ est un nombre impair, cette équation n'a qu'une racine réelle qui est $x = a$ ; mais qu'elle en a deux lorsque $m$ est pair, savoir $x = +a$ et $x = -a$. Il résulte de là que ses deux facteurs simples ou du premier degré sont

$$x - a\left(\cos\frac{2n}{m}\pi + \sin\frac{2n}{m}\pi\sqrt{-1}\right),$$

$$x - a\left(\cos\frac{2n}{m}\pi - \sin\frac{2n}{m}\pi\sqrt{-1}\right);$$

en les multipliant l'un par l'autre, on a pour facteur réel du second degré

$$x^2 - 2ax\cos\frac{2n}{m}\pi + a^2 ;$$

c'est-à-dire que l'équation proposée est encore divisible par ce facteur. Ainsi dans le cas de $m$ impair, elle peut être présentée sous la forme

$$x^m - a^m = (x - a)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2\pi}{m} + a^2\right) \times \left(x^2 - 2ax\cos\frac{4\pi}{m} + a^2\right), \text{ etc.}$$

Il n'est pas difficile de prouver que, dans la même hypothèse, les racines de l'équation $x^m + a^m = 0$ sont comprises dans la formule

$$x = a\left(\cos\frac{(2n+1)}{m}\pi \pm \sin\frac{(2n+1)}{m}\pi\sqrt{-1}\right),$$

et que par conséquent l'on a

$$x^m + a^m = (x + a)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{\pi}{m} + a^2\right) \times \left(x^2 - 2ax\cos\frac{3\pi}{m} + a^2\right), \text{ etc.}$$

Cela posé si $\alpha'\,\beta'$, $\alpha''\,\beta''$, $\alpha'''\,\beta'''$... dénotent les coordonnées des extrémités de $\rho_{(1)}\,\rho_{(2)}\,\rho_{(3)}$... comptés de l'origine de $\rho$, on aura

$$\rho_{(0)} = x - a,$$
$$\rho_{(1)}^2 = \alpha'^2 + \beta'^2, \quad \rho_{(2)}^2 = \alpha''^2 + \beta''^2, \text{ etc. ;}$$

d'ailleurs, puisque

$$\text{arc}(0)(1) = \frac{\pi}{m}, \ \text{arc}(0)(2) = \frac{2\pi}{m}, \ \text{arc}(0)(3) = \frac{3\pi}{m}, \ldots$$

il est clair que l'on a

$$\alpha' = x - a\cos\frac{\pi}{m}, \quad \beta' = a\sin\frac{\pi}{m},$$

$$\alpha'' = x - a\cos\frac{2\pi}{m}, \quad \beta'' = a\sin\frac{2\pi}{m},$$

. . . . . ;

et par conséquent

$$p_{(1)}^2 = x^2 - 2ax\cos\frac{\pi}{m} + a^2,$$

$$p_{(2)}^2 = x^2 - 2ax\cos\frac{2\pi}{m} + a^2,$$

. . . . . ;

mais les droites $p_{(1)}$ $p_{(2)}$... placées d'un côté du diamètre sont égales à celles $s_{(1)}$ $s_{(2)}$... qui leur correspondent de l'autre côté, donc

$$x^m - a^m = p_{(0)} \times p_{(2)} \times p_{(4)} \cdots s_{(2)} \times s_{(4)} \cdots$$

et

$$x^m + a^m = p_{(m)} \times p_{(1)} \times p_{(3)} \cdots s_{(1)} \times s_{(3)} \cdots$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Si on prenait l'origine des $p$ dans l'intérieur du cercle, les deux produits précédens seraient respectivement égaux à $a^m - x^m$ et à $a^m + x^m$. Moivre généralisa ce théorême en donnant le moyen de décomposer en facteurs quadratiques réels l'équation $x^{2m} - 2px^m + q = 0$. Consultez à ce sujet le *Calcul des fonctions* par Lagrange, pag. 111, et la seconde édition de la *Théorie des nombres* de Legendre, où l'on trouve, d'après M. Gauss, la belle théorie de la résolution de l'équation $x^n + 1 = 0$.

# CHAPITRE IV.

## *Des Problèmes indéterminés.*

74. L'ANALYSE des propositions qui sont l'objet du chapitre précédent, conduit toujours à autant d'équations distinctes qu'il y a de quantités à découvrir; mais lorsqu'il arrive le contraire, comme dans les questions qui vont suivre, l'équation finale, résultante de l'élimination possible des inconnues, en renferme nécessairement plusieurs; et comme on ne peut déterminer l'une de celles qui restent, sans attribuer préalablement des valeurs quelconques aux autres, le problème qui donne lieu à cette circonstance, est dit *indéterminé*. Lorsque la solution d'un tel problème mène à une équation qui ne renferme que deux inconnues ou variables, la courbe à laquelle cette équation appartient est toujours plane ou à *simple courbure*.

### PROBLÈME.

*Une droite et un point hors d'elle étant donnés à l'égard de deux axes rectangles, trouver l'équation de la droite assujétie à passer par ce point, et à faire avec la ligne donnée un angle connu.* [Fig. 59.]

Soient $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées du point $M$ donné,

$y = ax + b$ l'équation de la droite $CB$ connue,
et $t$ la tangente de l'angle donné.
L'équation de la droite cherchée $MQ$ est

$$y - \beta = a'(x - \alpha);$$

de plus l'angle $MQB$ devant être égal à l'angle donné, dont la tangente est $t$, on aura, conformément au n°. 38,

$$\frac{a' - a}{aa' + 1} = t.$$

Tirant la valeur de l'inconnue, on obtiendra, pour la tangente de la somme des deux angles connus,

$$a' = \frac{t + a}{1 - at},$$

et alors l'équation de la droite $MQ$ sera

$$y - \beta = \left(\frac{t + a}{1 - at}\right)(x - \alpha).$$

Ainsi en menant d'abord par l'origine $A$, la droite $Am$ qui fasse avec l'axe des $x$ un angle dont la tangente soit $a'$, et ensuite par le point $M$ la droite $MR$ parallèle à $Am$, le problême sera résolu graphiquement.

Si on voulait connaître un point de la droite $MR$ autre que $M$, le point $R$, par exemple, on ferait dans l'équation précédente, $y = 0$, et il en résulterait pour l'abscisse $AR$,

$$x = \alpha - \frac{\beta(1 - at)}{a + t}.$$

Lorsque la droite cherchée doit passer entre $P$ et $X$, il faut pour se conformer à l'observation du n°. 38, employer l'équation

$$\frac{a' + a}{1 - aa'} = t.$$

## PROBLÈME.

75. *Un angle étant donné, trouver un point duquel abaissant des perpendiculaires sur les côtés de cet angle, elles soient entre elles dans le rapport de* m : n.

[Fig. 60.] Soient $x'$, $y'$ les coordonnées du point $M'$ cherché, et $a$ la tangente de l'angle $MAB$.

L'équation de la droite $AM$ est

$$y = ax,$$

et la perpendiculaire $MM'$ abaissée du point $M'$ sur $AM$, a pour expression,

$$-\frac{y' - ax'}{\sqrt{1 + a^2}};$$

ainsi, d'après la condition exigée, l'on doit avoir la proportion

$$\frac{ax' - y'}{\sqrt{1 + a^2}} : y' :: m : n,$$

ce qui donne,

$$n(ax' - y') = my'\sqrt{1 + a^2},$$

d'où l'on tire,

$$y' = \frac{nax'}{n + m\sqrt{1 + a^2}}.$$

Si le point $M'$ était situé au-dessus de la droite $AM$, la perpendiculaire $MM'$ serait positive (n°. 36), et l'on aurait pour lors

$$y' = \frac{nax'}{n - m\sqrt{1 + a^2}}.$$

Il y a donc une infinité de points qui satisfont à la question, et de plus ces points sont situés sur une droite qui passe par l'origine des coordonnées, en faisant avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente trigonométrique est

$$\frac{na}{n \pm m\sqrt{1 + a^2}}.$$

Cette quantité se construit facilement, ainsi qu'il suit, en n'ayant égard, pour abréger, qu'au signe inférieur du radical.

Du sommet $A$ de l'angle donné, [Fig. 61) élevez sur $AB$ la perpendiculaire $AD$ égale à $n$; et du même point $A$ élevez sur $AC$ la perpendiculaire $AD'$ égale à $m$ : ensuite par les points $D$, $D'$ menez les droites $DM'$, $D'M'$ respectivement parallèles aux droites $AB$, $AC$, et joignez le point $M'$ d'intersection des premières droites avec le point $A$; la droite indéfinie $AM'$ sera celle qu'il s'agissait de trouver.

Pour se convaincre de l'exactitude de cette construction, on remarquera que l'angle $D'AE$ = l'angle $CAB$, parce que l'un et l'autre ont pour complément l'angle $EAC$; d'où il résulte, que $D'E = am$, et que l'hy-

poténuse $AE' = \sqrt{a^2m^2 + m^2} = m\sqrt{a^2+1} = QM'$. De plus, il est évident qu'à cause de $P'Q = P'M' - QM'$, on a

$$P'Q = n - m\sqrt{1+a^2}.$$

Cela posé, l'équation de la droite $D'M'$ parallèle à $AC$ est

$$y = ax + m\sqrt{1+a^2},$$

et celle de la droite $DM'$ parallèle à l'axe $AB$ est $y = n$; ainsi de ces deux dernières équations, l'on tirera pour l'abscisse $AP'$ du point $M'$ d'intersection,

$$x = \frac{n - m\sqrt{1+a^2}}{a};$$

et parce que la tangente de l'angle $M'AB = \frac{P'M'}{AP'}$, on aura, en employant les expressions analytiques,

$$\frac{P'M'}{AP'} = \frac{na}{n - m\sqrt{1+a^2}};$$

d'où il suit que l'équation de la droite $AM'$ est

$$y = \frac{nax}{n - m\sqrt{1+a^2}}.$$

De la solution précédente l'on déduit, comme conséquence immédiate, la manière de *trouver un point duquel abaissant des perpendiculaires sur trois lignes données de position les unes à l'égard des autres, ces perpendiculaires soient dans les rapports connus de* m : n : p.

Voici comment on peut effectuer la construction qui convient à ce problême.

Soient $AB$, $AC$, $CD$ [Fig. 62] les droites données; on déterminera par le procédé que l'on vient de suivre, la direction de la droite $AM$, de manière que les perpendiculaires $MN$, $MP$ soient dans le rapport de $m : n$. On fixera pareillement la direction de la droite $MC$, de manière que les perpendiculaires $MP$, $MQ$ soient dans le rapport de $n : p$, et le point $M$ d'intersection des droites $AM$, $CM$ sera le point qui remplira seul la condition exigée.

## PROBLÈME.

76 *Tant de points que l'on voudra étant donnés sur un plan par leurs coordonnées rectangles, mener une ligne droite à travers, telle que, abaissant de ces points sur cette droite une perpendiculaire, la somme des perpendiculaires d'un côté soit égale à celles de l'autre côté.*

[Fig. 63.] Supposons, pour plus de simplicité, que les points donnés ne soient qu'au nombre de trois; les considérations qui se rapportent à ce cas pourront s'étendre aisément à un plus grand nombre de points.

Soient

$$\left.\begin{matrix}\alpha\ ,\ \beta\\ \alpha'\ ,\ \beta'\\ \alpha''\ ,\ \beta''\end{matrix}\right\}\ \text{les coordonnées respectives des points}\ \left\{\begin{matrix}M\\ M'\\ M''.\end{matrix}\right.$$

Ce problême étant visiblement indéterminé, supposons

que la droite *CD* soit une de celles qui satisfont à la question, et qu'elle ait pour équation

$$y = ax + b.$$

Les lignes $pM$, $p'M'$, $p''M''$ devant être perpendiculaires à cette droite, leurs longueurs seront respectivement

$$\frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \frac{\beta' - a\alpha' - b}{\sqrt{1+a^2}}, \quad -\frac{\beta'' - a\alpha'' - b}{\sqrt{1+a^2}},$$

en prenant négativement les expressions des perpendiculaires situées au-dessous de la droite *CD*.

Ainsi, conformément à l'énoncé du problème, on aura

$$\beta - a\alpha - b + \beta' - a\alpha' - b = b + a\alpha'' - \beta'';$$

ce qui donne

$$b = \frac{\beta + \beta' + \beta''}{3} - a\,\frac{(\alpha + \alpha' + \alpha'')}{3}.$$

Comme cette quantité renferme deux inconnues $a$ et $b$, on ne peut obtenir l'une d'elles sans faire une supposition sur l'autre. Soit donc $b = 0$, on aura, pour la solution qui répond à ce cas,

$$a = \frac{\beta + \beta' + \beta''}{\alpha + \alpha' + \alpha''}.$$

Mais en substituant la valeur précédente de $b$ dans l'équation de la droite demandée, on aura

$$y - \frac{\beta + \beta' + \beta''}{3} = a\left(x - \frac{\alpha + \alpha' + \alpha''}{3}\right);$$

d'où il suit que toute droite qui passe par le point dont les coordonnées sont $\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{3}$, $\frac{\beta+\beta'+\beta''}{3}$, c'est-à-dire par le centre des *moyennes distances* des points donnés aux deux axes, satisfait à l'énoncé de la proposition.

Si l'un des points $M$ était situé au-dessous de l'axe des abscisses, il faudrait indiquer cette circonstance en prenant négativement l'ordonnée de ce point dans l'expression de la perpendiculaire correspondante.

On verra la généralisation de ce problême dans la troisième section de ce Recueil. Nous observerons, pour le moment, que si la somme des perpendiculaires dont il s'agit devait être égale à la ligne donnée $m$, l'analyse précédente conduirait à cette propriété ; savoir, que toutes les droites qui satisferaient à cette proposition seraient tangentes au cercle ayant pour centre celui des *moyennes* distances des points donnés, et pour rayon la droite $m$ divisée par le nombre de ces points donnés.

## PROBLÈME.

77. *Etant donnés tant de points que l'on voudra, en trouver un autre tel, que, menant une droite à chacun des autres, la somme des carrés de ces lignes soit égale à un carré donné* $q^2$.

[Fig. 64.] Supposons, pour simplifier les calculs, qu'il n'y ait que trois points donnés : cette restriction ne diminuera en rien la généralité de la solution du problême actuel ; et désignons par

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\},\qquad \left.\begin{matrix}\alpha'\\ \beta'\end{matrix}\right\},\qquad \left.\begin{matrix}\alpha''\\ \beta''\end{matrix}\right\}$$

les coordonnées des points

$$A,\qquad A',\qquad A''.$$

Soient de plus $x, y$ les coordonnées du point $M$ cherché. On aura dans l'hypothèse de la figure

$$\overline{AM}^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2,$$
$$\overline{A'M}^2 = (x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2,$$
$$\overline{A''M}^2 = (x-\alpha'')^2 + (y-\beta'')^2.$$

Or, si on développe ces équations, et que l'on égale leur somme à $q^2$, on aura, après avoir divisé tout par 3,

$$y^2 - \tfrac{2}{3}(\alpha+\alpha'+\alpha'')\,x + x^2 - \tfrac{2}{3}(\beta+\beta'+\beta'')\,y = \frac{q^2 - (\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2+\beta^2+\beta'^2+\beta''^2)}{3}.$$

Cette équation est très-remarquable, car elle indique que tous les points qui satisfont au problême sont situés sur une circonférence de cercle, et de plus que le centre de ce cercle est précisément le centre des forces parallèles supposées toutes égales entre elles, et appliquées aux points donnés $A$, $A'$, $A''$, etc. (*Mécanique*, de Francœur, n°. 36, 4e. édit.)

En effet, pour transporter l'origine des coordonnées au centre de la courbe, on mettra dans l'équation précédente $x' + \frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{3}$ au lieu de $x$, et $y' + \frac{\beta+\beta'+\beta''}{3}$

au lieu de $y$; alors la résultante ne renfermera plus que les secondes puissances des variables, et la quantité toute connue sera l'expression du carré du rayon du cercle à construire. Ayant donc pris une abscisse égale à $\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{3}$, et une ordonnée correspondante égale à $\frac{\beta+\beta'+\beta''}{3}$; l'extrémité de cette ordonnée sera à la fois le centre du cercle en question, et le centre de gravité des points $A$, $A'$, $A''$.

Cette proposition, qui est une de celles des *Loca plana* d'APOLLONIUS, peut se varier d'une infinité de manières; et dans toutes ses modifications elle offre des conséquences analogues à celles dont il vient d'être parlé. *Voy.*, sur ce sujet, l'*Histoire des Mathématiques*, par Montucla, tom. 1, pag. 284, 2e. édit. Nous envisagerons cette même proposition d'une manière plus générale dans la troisième section.

## PROBLÈME.

78. *Un point étant donné à l'égard de deux axes perpendiculaires entre eux, déterminer le lieu des centres de tous les cercles qui sont assujétis à passer par ce point, et à être tangens à l'un des axes.*

[Fig. 65.] Soient $\alpha$, $\beta$ les coordonnées du point $M$ donné; $x'$, $y'$ celles du centre $M'$ du cercle cherché; $r$ le rayon inconnu.

Le centre $M'$ de l'un des cercles qui doivent passer par le point $M$, et être tangens à l'axe $AY$ étant quelque

part dans l'angle $YAX$, l'équation de la circonférence sera

$$(x-x')^2+(y-y')^2=r^2,$$

et pour le point $M$ de cette circonférence, on aura

$$(\alpha-x')^2+(\beta-y')^2=r^2;$$

mais la condition du contact du cercle avec l'axe $AY$ s'exprimant par $r=x'$, on a

$$(\alpha-x')^2+(\beta-y')^2=x'^2;$$

développant et ordonnant, il vient

$$y'^2-2\beta y'-2\alpha x'+\alpha^2+\beta^2=0;$$

ainsi la courbe parabolique est le lieu des centres des cercles qui jouissent de la propriété énoncée ci-dessus.

Lorsque $\beta=0$, ou, ce qui est de même, lorsque l'axe des abscisses passe par le point donné, l'on a simplement

$$y'^2=2\alpha x'-\alpha^2.$$

Pour trouver le sommet de la parabole, on fera dans cette dernière équation, $y'=0$, et l'on aura

$$x'=\frac{\alpha}{2}.$$

Le plus petit cercle, qui satisfait à l'énoncé du problême, a donc pour rayon la moitié de l'abscisse du point donné.

Si le cercle à décrire devait passer par le point $M$ et toucher en même tems les deux axes $AX$, $AY$, le problême serait évidemment déterminé.

PROBLÈME.

79. *Une droite étant donnée de position à l'égard d'un cercle, trouver la trace des centres de tous les cercles qui sont tangens à la fois au cercle et à la droite donnés.*

[Fig. 66.] Soit $AX$ la ligne donnée ; du centre $C$ du cercle connu, abaissez sur cette ligne une perpendiculaire $AC$ qui pourra être prise pour l'axe des ordonnées, et soit

$$AC = b, \qquad AP' = x', \qquad P'C' = y' ;$$

$r$ le rayon $CR$ du cercle donné.

La distance $CC'$ sera exprimée en fonction des coordonnées de ses extrémités, par

$$(r + y')^2 = (b - y')^2 + x'^2.$$

Effectuant les développemens indiqués, on aura, toute réduction faite,

$$x'^2 = 2(b + r)y' - (b^2 - r^2).$$

Lorsque $x' = 0$, on a

$$y' = \frac{b^2 - r^2}{2(b + r)} = \frac{b - r}{2},$$

d'où il suit que, pour le cas de la figure, le centre du plus petit cercle touchant est situé au milieu de la distance qui se trouve entre la droite et le cercle donnés. Il peut arriver que ce dernier cercle soit touché ou coupé

par la droite $AX$, ce qui fait différens cas qui ne sont pas difficiles à discuter.

## PROBLÈME.

80. *Par deux points donnés, mener deux lignes perpendiculaires entre elles.*

[Fig. 67.] Soient

$$\left.\begin{matrix}\alpha, \beta \\ \alpha', \beta'\end{matrix}\right\} \text{ les coordonnées des points } \left\{\begin{matrix}M \\ M'.\end{matrix}\right.$$

L'équation de la droite $MN$ assujétie à passer par un point donné, et à faire un angle quelconque avec l'axe des abscisses, est

$$y - \beta = A(x - \alpha),$$

l'équation de la droite $M'N'$ qui doit lui être perpendiculaire, est

$$y - \beta' = -\frac{1}{A}(x - \alpha').$$

Or, pour que le point $M'$ soit commun aux deux droites proposées, il faut que $x$ et $y$ aient les mêmes valeurs dans les équations de ces droites. Cette supposition étant faite, on éliminera la tangente $A$, et l'on aura

$$(y - \beta)(y - \beta') = (\alpha' - x)(x - \alpha),$$

ou en développant, et faisant passer tous les termes dans le premier membre,

$$y^2 + x^2 - (\beta' + \beta)y - (\alpha' + \alpha)x + \alpha\alpha' + \beta\beta' = 0.$$

Cette équation étant celle du cercle entre ses coordonnées rectangles, il s'ensuit qu'il y a une infinité de points desquels menant des droites aux points donnés $M$, $M'$, ces droites forment entre elles un quadrant.

Lorsque $\alpha = \beta = \beta' = 0$, c'est-à-dire, quand l'axe des abscisses passe par les deux points donnés, et que l'origine est au point $M$, l'équation finale devient

$$y^2 - \alpha' x + x^2 = 0;$$

mais voici un autre problême dont celui-ci n'est qu'un cas particulier.

## PROBLÊME.

81. *Mener par deux points donnés deux droites qui fassent entre elles un angle connu.*

[Fig. 33.] Soit $t$ la tangente de l'angle donné, et supposons, ce qui est toujours possible, que les points donnés $A$, $P'$ soient sur l'axe des abscisses. Soit en outre $AP' = \alpha$.

La droite $AM$ qui passe par l'origine, a pour équation

$$y = ax;$$

et la droite $P'M$ qui passe par un point pris sur l'axe, est

$$y = -a'(x - \alpha).$$

D'un autre côté la tangente de l'angle $AMP'$ étant représentée par $t$, la tangente du supplément ou celle de

l'angle $NMP'$ le sera par $-t$ ; ainsi l'on aura, suivant le n°. 38,

$$t = \frac{-a' - a}{1 - aa'},$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{t + a'}{a't - 1}.$$

Si on substitue cette valeur dans l'équation de la droite $AM$, il viendra

$$y = \frac{(a' + t)\,x}{a't - 1};$$

et si on élimine $a'$ par le moyen de celle-ci, et de l'équation de la droite $P'M$, on parviendra à une relation entre les seules inconnues $x$, $y$ : cette relation est

$$x^2 + y^2 - ax - \frac{ay}{t} = 0, \qquad (A)$$

et indique que tous les angles égaux $AMP'$ ont leur sommet sur une circonférence de cercle.

Lorsque l'angle donné $AMP'$ est droit, sa tangente $t$ est infinie, et alors le dernier terme de l'équation $(A)$ s'évanouit ; de manière que l'on a simplement

$$x^2 + y^2 - ax = 0,$$

comme dans le problême précédent.

Pour donner encore quelques exemples de construction des équations indéterminées, voici comment on procédera à l'égard de celle que nous avons désignée par $(A)$. On y fera

$$x = x' + \frac{a}{2},$$

et

$$y = y' + \frac{a}{2t},$$

afin de transporter l'origine des coordonnées au centre de la courbe ; et après avoir effectué les calculs nécessaires, on parviendra à

$$x'^2 + y'^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4t^2} = 0.$$

C'est l'équation du cercle rapportée au centre, le rayon étant égal à $\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4t^2}}$. (*B*)

Le moyen de construire cette expression radicale est aisé. En effet, élevez sur le milieu de la droite $AP'$ la perpendiculaire $Pm = \frac{a}{2t}$, l'extrémité $m$ de cette perpendiculaire sera le centre du cercle cherché, et la ligne $AM$ en sera le rayon ; ce qui est évident.

Il suit de cette construction que l'angle $AmP$ = l'angle $AMP'$ ; car l'équation de la droite $Am$ est

$$y = \left(\frac{Pm}{AP}\right) x = \frac{1}{t} x,$$

et puisque la tangente de l'angle $mAP$ est $\frac{1}{t}$, sa cotangente ou la tangente de l'angle $AmP$ sera $= t$. Concluons de là que l'angle au centre est double de l'angle inscrit : ce qui s'accorde parfaitement avec les considérations géométriques.

On remarquera que l'expression (*B*) du rayon peut être mise sous une forme plus simple ; car d'abord, on peut l'écrire ainsi

$$\frac{a}{2t}\sqrt{1+t^2};$$

mais $t =$ tang $AMP'$ et $\sqrt{1+t^2} =$ séc $AMP'$ ; donc

$$\frac{a}{2t}\sqrt{1+t^2} = \frac{a}{2\sin M}.$$

On voit maintenant comment on résoudrait ce problème : *Déterminer la position d'un point* D, *connaissant les angles sous lesquels on voit de ce point les distances* AB, AC *données de grandeur et de position.* Consultez, à cet égard, mon *Traité de Géodésie*, pag. 170.

## THÉORÈME.

82. [Fig. 68.] *Si on divise, en un même nombre de parties égales, deux droites* AB, AC, *faisant entre elles un angle quelconque ; puis si l'on joint successivement tous les points de la première droite en commençant par* B *avec tous les points de la seconde droite, en commençant par le point* (1) *de cette ligne, les intersections de deux droites consécutives prises dans l'ordre de ce tracé seront toutes sur une courbe parabolique.*

Prenons pour axe des $x$ la droite $AX$ [Fig. 69.], qui divise en deux parties égales la droite $BC$ joignant les points donnés, et pour axe des $y$ la droite $AY$ parallèle

à $BC$. Cela posé, si nous admettons que les lignes $Mm$, $M'm'$ soient deux droites consécutives quelconques, leur intersection $N$ sera un point de la courbe cherchée. Soit dans ce cas, $MM' = a$, $mm' = b$; on aura, d'après le système de tracé que l'on vient d'indiquer,

$$AM = za,\ MB = (n-z)a,\ Am = (n-z+1)b,\ Cm = (z-1)b,$$

$n$ étant le nombre des parties égales de $AB$ ou de $AC$. De plus, si on fait $AH = p$, $HB = q$, on trouvera aisément que les coordonnées obliques des points $M$, $m$, $M'$, $m'$ sont

pour le point $M$,

$$AP = \frac{zp}{n}, \qquad PM = \frac{zq}{n},$$

pour le point $m$,

$$Ap = \frac{p(n-z+1)}{n}, \quad pm = \frac{q(n-z+1)}{n},$$

pour le point $M'$,

$$AP' = \frac{(z+1)p}{n}, \qquad P'M' = \frac{(z+1)q}{n},$$

pour le point $m'$,

$$Ap' = \frac{p(n-z)}{n}, \quad p'm' = \frac{q(n-z)}{n}.$$

De là, la droite $Mm$, assujétie à passer par les deux points $M$, $m$, aura pour équation aux coordonnées obliques,

$$y - \frac{zq}{n} = \frac{q(n+1)}{p(2z-n-1)}\left(x - \frac{zp}{n}\right); \qquad (1)$$

l'équation de la droite $M'm'$ sera pareillement

$$y-\frac{(z+1)q}{n}=\frac{q(n+1)}{p(2z-n+1)}\left(x-\frac{(z+1)p}{n}\right). \qquad (2)$$

Maintenant, puisqu'au point d'intersection $N$ les coordonnées $x$, $y$ sont les mêmes pour les droites $Mm$, $M'm'$, et que les deux équations précédentes sont les seules qui existent entre les trois inconnues $x$, $y$, $z$, il est évident que l'on obtiendra l'équation de la courbe à laquelle appartiennent tous les points $N$, en éliminant $z$ entre ces deux équations. Afin d'effectuer plus commodément cette élimination, l'on ordonnera par rapport à $z$ les équations dont il s'agit, et l'on aura, toutes réductions faites,

$$(1')\ z^2-\frac{ny+q(n+1)}{q}z+\frac{npy(n+1)+nqx(n+1)}{2pq}=0,$$

$$(2')\ z^2+\frac{q(1-n)-ny}{q}z+\frac{npy(n-1)+nqx(n+1)-2npq}{2pq}=0.$$

Or, en soustrayant ces deux résultats l'un de l'autre, on obtient

$$z=\frac{ny+nq}{2q};$$

et en substituant cette valeur dans l'équation (1') on a

$$npy^2-2q^2(n+1)x+pq^2(n+2)=0. \qquad (3)$$

Donc la courbe cherchée est une parabole ; et son diamètre coïncide évidemment avec l'axe des $x$, puisque l'ordonnée $y$ n'entre qu'à la seconde puissance dans cette équation.

Si on prenait le point $H$ pour origine des coordonnées, et qu'on désignât par $x'$ la nouvelle abscisse, on aurait, à cause de $x = p + x'$,

$$(3') \qquad npy^2 - 2q^2(n+1)x' - pq^2n = 0 ;$$

faisant ici $y = 0$, l'abscisse de l'extrémité du diamètre serait

$$x' = \frac{-pn}{2(n+1)}.$$

La plus petite valeur admissible de $n$ est 2, auquel cas $x' = \frac{-p}{3}$, et $n$ peut croître depuis ce terme jusqu'à l'infini : or, à cette dernière limite on a $x' = \frac{-p}{2}$; ainsi la parabole qui a le plus grand paramètre répond à $n = 2$, et celle qui aurait le plus petit paramètre répondrait à $x' = \frac{-p}{2}$, ou à $n = \infty$. Jamais, par la méthode graphique exposée, on ne pourra obtenir cette parabole limite ; mais on en approchera d'autant plus que $AB$ et $AC$ contiendront plus de parties. Pour connaître l'usage de ce tracé, *voy.* le n°. 100 de mon *Traité de Typog., etc.*

## PROBLÈME.

83. *Trouver le lieu du sommet d'un triangle dont la base est donnée, et dont les deux angles adjacens ont une différence donnée.*

[ Fig. 70. ] La base $AB = a$ du triangle $AMB$ est

donnée, ainsi que la différence $\delta$ des angles inconnus $MAB = A$, $MBA = B$. On demande la nature de la courbe sur laquelle sont situés les sommets $M$ de tous les triangles que l'on peut construire avec les mêmes données.

Soient $x$, $y$ les coordonnées rectangles du point $M$, et $A$ l'origine des axes.

Puisque $\delta = A - B$, on a $\text{tang}\,\delta = \dfrac{\text{tang}\,A - \text{tang}\,B}{1 + \text{tang}\,A\,\text{tang}\,B}$;

mais à cause de $\text{tang}\,A = \dfrac{y}{x}$ et de $\text{tang}\,B = \dfrac{y}{a-x}$,

cette expression de tang $\delta$ se change en celle-ci

$$\text{tang}\,\delta = \frac{y(a-x) - xy}{(a-x)\,x - y^2},$$

d'où

$$y^2 + \frac{2}{\text{tang}\,\delta}\,xy - x^2 - \frac{a}{\text{tang}\,\delta}\,y + ax = 0. \quad (1)$$

Si l'on compare cette équation avec l'équation générale des courbes du second ordre,

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F, \quad (2)$$

on verra d'abord que la condition $4AC - B^2 < 0$ est satisfaite : en effet l'on a $4AC - B^2 = -4 - \dfrac{4}{\text{tang}^2\,\delta}$.

La courbe cherchée est donc une hyperbole.

Il est facile de déduire de l'équation (2) celle des asymptotes, qui est

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\left[x\sqrt{B^2-4AC}+\frac{BD-2AE}{\sqrt{B^2-4AC}}\right]; \quad (*)$$

par conséquent l'équation (1) fournira, dans la même circonstance,

$$y=-\frac{x}{\tang\delta}+\frac{a}{2\tang\delta}\pm\tfrac{1}{2}\left(\frac{2x-a}{\tang\delta}\right)\sqrt{1+\tang^2\delta}, \quad (3).$$

Toute la partie rationnelle de ce résultat étant l'équation d'un diamètre, c'est-à-dire

$$y=-\frac{x}{\tang\delta}+\frac{a}{2\tang\delta}; \quad (4)$$

on aura l'abscisse du centre de l'hyperbole, en faisant

$$\pm\tfrac{1}{2}\left(\frac{2x-a}{\tang\delta}\right)\sqrt{1+\tang^2\delta}=0,$$

ce qui donnera $x=\frac{a}{2}$;

puis mettant cette valeur dans l'équation (4), on trouvera, pour l'ordonnée de ce centre,

$$y=0.$$

Ainsi ce point est le milieu même de la droite $a$. Ce procédé revient évidemment à combiner les équations (3)

(*) *Voyez* d'ailleurs sur ce sujet les nos. 240 et 243 de l'*Essai de Géom. analyt.* par Biot, où le no. 59 des *Elémens* (*id.*) de Garnier.

des deux asymptotes pour en déduire les valeurs des coordonnées de leur point d'intersection.

Il reste à déterminer la direction de ces droites. Pour cet effet, on cherchera les coordonnées des points où elles coupent l'axe des $y$, en faisant $x = 0$ dans l'équation (3), et on aura, en désignant par $y'$, $y''$ les deux valeurs résultantes de $y$,

$$y' = AG = \frac{a}{2 \operatorname{tang} \delta} + \tfrac{1}{2} \frac{a}{\sin \delta},$$

$$y'' = AH = \frac{a}{2 \operatorname{tang} \delta} - \tfrac{1}{2} \frac{a}{\sin \delta} :$$

les droites $KG$, $KH$ déterminées de cette manière sont donc les asymptotes cherchées. Il est remarquable qu'en multipliant entre elles ces deux valeurs, on obtient... $\frac{a^2}{4} = \overline{AK}^2$; donc l'angle $GKH$ des asymptotes est droit; donc l'hyperbole cherchée est équilatère.

Mais quel est l'angle qu'une de ces lignes forme avec l'axe des $x$? La réponse est facile à faire, car on a

$$\operatorname{tang} BKH' = \frac{BH'}{BK} = \frac{1}{\sin \delta} - \frac{1}{\operatorname{tang} \delta} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \delta :$$

donc l'angle $BKH'$ est égal à la moitié de la différence $\delta$ des angles $A$ et $B$.

Newton, après être parvenu aux mêmes conséquences, par une méthode de calcul qui lui est propre (*Arith. univ.*, prob. 41.), imagina, pour donner la solution la plus simple possible de ce problème, de prendre les asymptotes mêmes pour les axes des coordonnées; mais ce

grand génie n'aurait peut-être pas eu une pareille idée, si l'analyse ne la lui eût fournie.

## PROBLÈME.

84. *Deux cercles étant donnés de grandeur et de positions sur un plan, trouver le lieu des centres de tous les cercles qui sont tangens à la fois aux deux cercles donnés.*

[Fig. 71.] Supposons que le cercle cherché enveloppe les deux cercles donnés, et nommons $x$, $y$ les coordonnées du centre du premier cercle, $z$ son rayon, $a$ la distance $AA'$ des centres des deux autres, $r$ et $r'$ les rayons de ces cercles.

Il suit de la propriété des triangles rectangles $APM$, $A'PM$ que l'on a d'une part

$$x^2 + y^2 = (z - r)^2, \qquad (1)$$

et de l'autre

$$y^2 + (a - x)^2 = (z - r')^2. \qquad (2)$$

Développant ces équations, elles deviennent

$$x^2 - 2rz + r^2 = x^2 + y^2,$$
$$x^2 - 2r'z + r'^2 = a^2 - 2ax + y^2 + x^2.$$

Or, si on les comparait avec les formules du second degré,

$$z^2 + Pz + Q = 0,$$
$$z^2 + P'z + Q' = 0,$$

qui, comme l'on sait, donnent pour résultat final,

$$(P-P')(PQ'-QP')+(Q-Q')^2=0, \qquad (A)$$

on arriverait aisément à l'équation de la courbe cherchée; mais il est encore plus simple de procéder de la manière suivante :

Soustrayant l'une de l'autre les équations (1) et (2), on a

$$z=\frac{2ax-a^2+r'^2-r^2}{2(r'-r)},$$

et ajoutant ici $-r$ de part et d'autre, on obtient

$$z-r=\frac{2ax-a^2+(r-r')^2}{2(r'-r)};$$

puis introduisant cette valeur dans l'équation (1), il vient

$$4(r-r')^2y^2+4((r-r')^2-a^2)x^2-4a((r-r')^2-a^2)x = ((r-r')^2-a^2)^2. \qquad (A')$$

Cette équation est celle de l'hyperbole, parce que les coefficiens de $x^2$ et de $y^2$ sont de signes contraires. En effet, à cause de $r-r'<a$, on a $4(r-r')^2<4a^2$.

Mais lorsque $r-r'=a$, ce qui est dans le cas de la fig. 72, l'équation de la courbe hyperbolique devient, en y faisant les réductions convenables, $y=0$. Ce résultat étant indépendant de $x$, il en résulte qu'à tous les points de l'axe des abscisses, l'ordonnée du centre cherché est nulle.

De même si $r=r'$, l'équation de l'hyperbole devient

$$x^2-ax=-\frac{a^2}{4},$$

et l'on tire de là,

$$x = \frac{a}{2};$$

ce qui indique, comme on devait bien s'y attendre, que, quelle que soit l'ordonnée $y$, l'abscisse est toujours constante.

Nous ne laisserons point ignorer que l'on peut plus promptement découvrir la nature de la courbe cherchée, car puisque, d'un côté, l'on a $AM = z - r$ [Fig. 71], et de l'autre $A'M = z - r'$, il s'ensuit que

$$AM - A'M = (z - r) - (z - r') = r' - r.$$

Ce résultat se trouvant délivré du rayon du cercle cherché, l'on en doit conclure que la différence des rayons vecteurs $AM$, $A'M$ est toujours constante, soit que le cercle cherché enveloppe les cercles donnés, soit qu'il les laisse tous deux au dehors. La courbe des centres en question est donc une hyperbole, qui a pour foyers les centres mêmes des cercles donnés, et pour grand axe la différence de leurs rayons.

On peut en outre obtenir les sommets des hyperboles opposées, sans être obligé de recourir à la transposition des axes : en effet, au point où l'hyperbole coupe l'axe des abscisses, l'ordonnée est nulle ; faisant donc $y = 0$ dans l'équation $(A')$, et divisant tout par le coefficient de $x^2$, on aura

$$x^2 - ax = \frac{((r - r')^2 - a^2)^2}{4((r - r')^2 - a^2)} = \frac{(r - r')^2 - a^2}{4}.$$

Cette équation étant résolue par rapport à $x$, on obtiendra

$$x = \frac{a}{2} \pm \left(\frac{r - r'}{2}\right).$$

Comme la première valeur de $x$ répond à l'abscisse $AS'$, et la seconde valeur à l'abscisse $AS$, le grand axe $SS'$ de l'hyperbole sera égal à $r - r'$, et le centre $O$ sera situé au milieu de la distance $AA'$. De plus, la branche hyperbolique $\pi SQ$ sera celle sur laquelle sont situés les centres des cercles enveloppans, tandis que la branche $\pi' S' Q'$ renfermera les centres de tous les cercles qui laissent les cercles donnés au dehors. Rien n'est plus facile que de se rendre compte des autres particularités du problême.

## PROBLÊME.

85. *Trouver la nature de la courbe qui renferme tous les points desquels menant deux tangentes à une parabole donnée, ces tangentes forment entre elles un angle donné.*

[Fig. 73.] Soit $y^2 = px$ l'équation de la parabole donnée, et désignons par

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix}\alpha'\\ \beta'\end{matrix}\right\}$$

les coordonnées des points de contact

$$M, \qquad M'.$$

Soit de plus $t$ la tangente de l'angle donné.

L'équation de la droite $TM$ assujétie à toucher la

courbe $M$, est (n°. 44.)

$$2\beta y = px + \alpha p, \qquad (1)$$

et celle de la tangente $T'M'$, assujétie à passer par le point $M'$ pour lequel $P'M' = -\beta'$, est

$$-2\beta' y = px + \alpha' p; \qquad (2)$$

mais les coordonnées du point $m$ d'insersection de ces tangentes doivent être les mêmes dans les équations (1) et (2); et ce point $m$ étant situé du côté des abscisses négatives, il faudra, pour avoir égard à cette circonstance, changer $x$ en $-x$; alors les équations ci-dessus deviendront

$$2\beta y = -px + \alpha p,$$
$$2\beta' y = \quad px - \alpha' p;$$

et comme des équations $\beta^2 = \alpha p$, $\beta'^2 = \alpha' p$, qui conviennent aux points de contact, on tire ces valeurs

$$\alpha = \frac{\beta^2}{p}, \quad \alpha' = \frac{\beta'^2}{p}, \qquad (3)$$

il est clair que l'on a

$$2\beta y = -px + \beta^2,$$
$$2\beta' y = \quad px - \beta'^2;$$

d'où l'on tire

$$\beta = \quad y \pm \sqrt{px + y^2},$$
$$\beta' = -y \pm \sqrt{px + y^2}.$$

D'un autre côté, l'angle $MmM' = MTA + AT'M'$;

ainsi, d'après le n°. 38, on a

$$t = \frac{A + A'}{1 - AA'} = \frac{2\alpha\beta' + 2\alpha'\beta}{4\alpha\alpha' - \beta\beta'}.$$

Substituant dans ce résultat, pour $\alpha$ et $\alpha'$, leurs valeurs données par les équations (3), on aura, après avoir chassé le dénominateur,

$$4\beta\beta' t - p^2 t = 2\beta p + 2\beta' p.$$

Mettant en outre dans celle-ci, au lieu de $\beta$ et $\beta'$ leurs valeurs obtenues précédemment, il viendra, en divisant tout par $p$,

$$4tx - pt = 4\sqrt{px + y^2}.$$

Elevant les deux membres au carré, pour faire disparaître le radical, on aura enfin

$$y^2 + \left(\frac{pt^2}{2} + p\right)x - t^2x^2 - \frac{p^2t^2}{16} = 0, \qquad (A)$$

équation à l'hyperbole, puisque sa forme se rapporte évidemment à la formule $A'y^2 - C'x^2 + E'x = M$, qui représente cette courbe (n°. 42).

Le moyen de transporter l'origine au centre de l'hyperbole, et de donner par conséquent à l'équation précédente la forme $y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(x'^2 - a^2)$, est de chasser le terme où $x$ se trouve à la première puissance, en mettant $x' + q$ au lieu de $x$ dans l'équation de la courbe; mais on sait d'ailleurs, par la théorie des équations, qu'en pareil cas, l'on a

$$x = x' + \frac{p}{4} + \frac{p}{2t^2}.$$

La formule (*A*) deviendra donc, par la substitution de cette valeur,

$$y^2 = t^2\left(x'^2 - \frac{p^2}{4t^4}(t^2+1)\right). \qquad (B)$$

Pour trouver le premier demi-axe, on fera, dans ce résultat, $y = 0$, et l'on obtiendra

$$x' = a = \pm\frac{p}{2t^2}\sqrt{t^2+1};$$

et pour trouver le second demi-axe, ou fera $x' = 0$, ce qui donnera

$$y = b = \pm\frac{p}{2t}\sqrt{t^2+1}.$$

Si on se rappelle maintenant que, par le calcul des fonctions circulaires, on a

$$\sin m = \frac{\text{tang } m}{\sqrt{1+\text{tang } m^2}},$$

on pourra simplifier l'expression des demi-axes, ainsi qu'il suit : par exemple, en désignant le sinus de l'angle $MmM'$ par $f$, lorsque sa tangente l'est par $t$, on conclura, de la formule précédente, que

$$\frac{1}{f} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t},$$

et par suite

$$a = \frac{p}{2tf}, \qquad b = \frac{p}{2f};$$

ainsi l'équation $(B)$ devient

$$y^2 = t^2\left(x'^2 - \frac{p^2}{4t^2f^2}\right) \qquad (B')$$

Il suit de là qu'en diminuant les $x$ de la quantité $\frac{1}{4}p + \frac{p}{2t^2}$, et décrivant une hyperbole dont les axes soient $2a$, et $2b$, cette courbe sera le lieu de l'équation $(A)$.

Dans la solution précédente, on a supposé que l'angle donné $MmM'$ était aigu, et il est visible que lorsqu'il est obtus, sa tangente négative, qui n'entre dans tous les termes de l'équation $(A)$ qu'à la seconde puissance, n'y produit aucun changement. Concluons donc que des deux branches hyperboliques, l'une $QR$, satisfait au cas où l'angle proposé est aigu, et l'autre $Q'R'$, au cas où cet angle est obtus.

Enfin, s'il arrivait que l'angle $MmM'$ fût droit, la ligne cherchée serait la directrice même de la parabole, parce qu'alors l'équation $(B')$ donnerait, quelle que fût $y$, $x' = 0$; et à cause de $x = x' + \frac{1}{4}p + \frac{1}{8}\frac{p}{t^2}$, on aurait dans la même circonstance $x = \frac{1}{4}p$, ce qui exprime la distance du sommet de la courbe à la directrice.

En cherchant, par un procédé analogue, quelle serait la courbe que parcourrait le sommet d'un angle droit dont les côtés toucheraient constamment une ellipse, on trouverait l'équation du cercle.

## PROBLÈME.

86. [Fig. 60.] *Trouver un point* M' *duquel ayant abaissé des perpendiculaires sur les côtés d'un angle donné* MAB, *le quadrilatère qui en résulte soit équivalent à un carré* $q^2$.

Soit $a$ la tangente de l'angle donné $MAB$, et $x', y'$ les coordonnées du point $M'$ cherché.

L'équation de la droite $AM$ qui passe par l'origine $A$, est

$$y = ax,$$

et celle de la droite $MM'$ qui lui est perpendiculaire, est

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x').$$

Ainsi les coordonnées du point $M$ d'intersection de ces droites seront

$$x = \frac{x' + ay'}{1 + a^2}, \qquad y = \frac{ax' + a^2y'}{1 + a^2}.$$

L'aire du triangle $AMM'$, exprimée en fonction des coordonnées des sommets de ses angles, est (n°. 101. *L. C.*)

$$\frac{x'(ax' + a^2y') - y'(x' + ay')}{2(1 + a^2)},$$

et l'aire du triangle $AP'M' = \frac{x'y'}{2}$. Or, comme le quadrilatère $AMM'P' = AMM' + AM'P' = q^2$, il s'ensuit

que,

$$a^2x'y'+ax'^2-x'y'-ay'^2+x'y'+a^2x'y'=2q^2(1+a^2),$$

ou, en changeant les signes, réduisant et divisant tout par $a$,

$$y'^2-2ax'y'-x'^2=-2q^2\left(\frac{1+a^2}{a}\right). \qquad (A)$$

Telle est l'équation qu'il faudrait construire pour obtenir le lieu de tous les points $M'$ qui satisfont à la condition du problème proposé. Si on résout cette équation par rapport à $y'$, on aura

$$y'=ax'\pm\sqrt{(1+a^2)\left(x'^2-\frac{2q^2}{a}\right)},$$

d'où l'on voit que la courbe résultante est une hyperbole qui a son centre au point $A$; et qu'à cause de la quantité rationnelle $ax'$, la droite $AM$ doit être prise pour un de ses diamètres (n°. 111. *L. C.*). On portera donc parallèlement à l'axe $AY$, tant au-dessus qu'au-dessous de $AM$ et de $Am$, des parties égales à . . . . . $\sqrt{(1+a^2)\left(x'^2-\frac{2q^2}{a}\right)}$; l'ensemble des points que l'on obtiendra de cette manière déterminera les branches de la courbe à décrire. Nous ne nous étendrons pas davantage sur les détails de cette construction, parce qu'ils ne présentent aucune difficulté; nous remarquerons seulement que si, dans l'équation $(A)$, l'on voulait chasser le terme multiplié par $x'y'$, il faudrait changer la direction des coordonnées, en y faisant (n°. 40)

$$x'=mt-nu, \qquad y'=nt+mu;$$

et dans ce cas, l'équation résultante serait celle de l'hyperbole rapportée à ses axes.

Lorsque $a$ est infinie, ou, ce qui est de même, lorsque l'angle donné $MAB$ est droit, l'équation $(A)$ se réduit à $x'y' = q^2$, parce que tous les termes sans $a$ sont nuls par rapport à ceux qui en renferment; mais si l'on veut éviter la considération de l'infini, on fera $a = \frac{\sin A}{\cos A}$, et l'équation $(A)$ deviendra, par la substitution de cette valeur, et après avoir chassé le dénominateur $\cos A$,

$$\cos A y'^2 - 2 \sin A x'y' - \cos A x'^2 = -2q^2 \left(\frac{1}{\sin A}\right).$$

L'angle $MAB$ étant droit, on a $\cos A = 0$, et $\sin A = 1$; ainsi l'équation précédente se réduit à

$$x'y' = q^2;$$

c'est celle de l'hyperbole équilatère entre ses assymptotes $AX$, $AY$.

Enfin, si l'angle est plus grand qu'un quadrant, sa tangente $a$ devient négative, et l'équation $(A)$, qui appartient encore à l'hyperbole, se change en

$$y'^2 + 2ax'y' - x'^2 = 2q^2 \left(\frac{1 + a^2}{a}\right).$$

Il y a plusieurs moyens de rendre le problême actuel déterminé, par exemple, il le serait si la perpendiculaire $MM'$ devait être tangente à un cercle donné de grandeur et de position, et que toutes choses fussent égales d'ailleurs comme précédemment; mais alors le carré $q^2$ ne pourrait excéder certaines limites.

## PROBLÈME.

87. [Fig. 74.] *Deux cercles* AB, A'B' *étant donnés de grandeur et de position sur un plan, et ayant mené par un point quelconque* C' *du cercle* A'B' *une tangente indéfinie* C'T, *qui coupe l'autre cercle* AB *en deux points* m, m', *par lesquels soient menées à celui-ci les tangentes* mM, m'M ; *on demande la nature de la ligne sur laquelle sont situés tous les points de concours* M.

Soient $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées du point $M$ cherché,

rayon $AB = r$ $\quad x, Y$ } les coordonnées { $m$
rayon $A'B' = r'$ $\quad X, y$ } des points { $m'$,

et désignons par $a$ la distance $AA'$ des deux centres.

Puisque la tangente $Mm$ doit passer par un point dont les coordonnées variables sont $\alpha$, $\beta$, son équation sera (n°. 46)

$$\beta y + \alpha x = r^2 \qquad (1)$$

et parce que l'équation du cercle $AB$ est

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (2)$$

la combinaison de ces équations donnera

$$x = \frac{\alpha r^2 \pm \beta r \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - r^2}}{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$y = \frac{\beta r^2 \pm \alpha r \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - r^2}}{\alpha^2 + \beta^2} \text{ (*).}$$

Il est à remarquer que les valeurs de $x$ et de $y$, prises par rapport aux signes supérieurs, désignent respectivement les grandeurs de $X$ et $Y$; et que ces mêmes valeurs, prises par rapport aux signes inférieurs, répondent aux grandeurs de $x$ et de $y$. Or, si l'on fait, pour abréger, $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - r^2} = M$ et $\alpha^2 + \beta^2 = N$, on aura plus simplement

$$X = \frac{\alpha r^2 + \beta r M}{N}, \qquad x = \frac{\alpha r^2 - \beta r M}{N},$$

$$Y = \frac{\beta r^2 + \alpha r M}{N}, \qquad y = \frac{\beta r^2 - \alpha r M}{N}.$$

Les coordonnées des points $m$, $m'$ étant connues, on cherchera l'abscisse $AT$ du point où la droite $mm'$ rencontre l'axe $AX$; et il est visible qu'en désignant par $z$ la distance $p'T$, on aura cette égalité,

$$\frac{Y - y}{X - x} = \frac{y}{z},$$

d'où l'on tire, après avoir employé les valeurs analytiques précédentes, et réduit,

$$z = \frac{\beta y}{\alpha};$$

par conséquent $AT = X + z = X + \frac{\beta y}{\alpha}$.

(*) Les quantités $x$, $y$ entrant de la même manière dans les équations (1) et (2), il s'ensuit que l'on obtiendra de suite la valeur de $y$, par exemple, en changeant dans celle de $x$, $\alpha$ en $\beta$, et réciproquement.

Si on substitue maintenant dans la formule (1) du n°. 60, pour $a$ sa valeur actuelle $\frac{y}{z} = \frac{\alpha}{\beta}$, et pour $a$ la quantité $a + X + z$, on obtiendra, en accentuant la lettre $r$,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r'}{\sqrt{(a+X+z)^2 - r'^2}}.$$

Cette expression, qui est celle de la tangente trigonométrique de l'angle formé par l'axe $AX$ et la tangente $CT'$ au cercle $A'B'$, étant délivrée de son radical, pourra; après y avoir remplacé $X$ et $z$ par leurs valeurs calculées plus haut, s'écrire ainsi :

$$\left(a + \frac{(\alpha^2 + \beta^2) r^2}{\alpha N}\right)^2 - r'^2 = \frac{r'^2 \beta^2}{\alpha^2},$$

et à cause de $\alpha^2 + \beta^2 = N$, on aura

$$\left(a + \frac{r^2}{\alpha}\right)^2 - r'^2 = \frac{r'^2 \beta^2}{\alpha^2}.$$

Développant le premier terme de cette équation, et chassant les dénominateurs, il viendra

$$a^2\alpha^2 + 2ar^2\alpha - r'^2\alpha^2 + r^4 = r'^2\beta^2,$$

et enfin

$$\beta^2 + \left(\frac{r'^2 - a^2}{r'^2}\right)\alpha^2 - \frac{2ar^2}{r'^2}\alpha - \frac{r^4}{r'^2} = 0.$$

Telle est l'équation de la courbe d'intersection des tangentes $mM$, $m'M$, dont le lieu est une parabole, une ellipse ou une hyperbole, selon que $r'$ est égal ou plus grand, ou moindre que $a$.

## PROBLÈME.

88. *Inscrire une ellipse dans un triangle, de manière qu'un de ses diamètres soit situé sur la ligne qui passe par le sommet et par le milieu de la base de ce triangle.*

[Fig. 75.] Le grand diamètre $AB$ étant pris sur la ligne $AT$, qui passe par le milieu de la base $GH$ et par le point $T$, le petit diamètre $CD$ sera nécessairement parallèle à la tangente $GH$, et les points de contact $M$, $M'$ seront aux extrémités de la double ordonnée $MM'$; parce qu'à une même abscisse correspondent deux ordonnées égales, et que les tangentes qui leur sont relatives, se rencontrent sur le prolongement du diamètre.

Cela posé, faisons $GH = 2m$, $AG = m$, $AT = n$, le diamètre $AB = 2a'$, son conjugué $CD = 2b'$; et désignons par $\alpha$, $\beta$ les coordonnées $OP$, $PM$ du point $M$.

L'équation de l'ellipse relativement à ses diamètres, est

$$a'^2u^2 + b'^2t^2 = a'^2b'^2,$$

$t$ étant considérée comme l'abscisse prise sur $AB$, et $u$ comme l'ordonnée correspondante. Cette équation deviendra, pour le point $M$,

$$a'^2\beta^2 + b'^2\alpha^2 = a'^2b'^2. \qquad (1)$$

De plus, les points $T$, $M$, $H$ étant sur une même droite, les rapports $\frac{AH}{AT}$ et $\frac{PM}{PT}$, sont nécessairement égaux; ainsi, en employant la notation algébrique,

on a

$$\frac{m}{n} = \frac{\beta}{n - a' - \alpha},$$

d'où l'on tire

$$\beta = \frac{(n - a' - \alpha)\, m}{n}. \qquad (2)$$

Enfin, pour exprimer que les lignes $GT$, $TH$ sont en contact avec l'ellipse, on aura

$$\text{soutangente } PT = \frac{a'^2 - \alpha^2}{\alpha} = n - a' - \alpha. \qquad (3)$$

Ces trois équations renfermant une inconnue de plus, le problème demeure indéterminé ; c'est-à-dire, qu'il existe une infinité d'ellipses qui jouissent de la propriété énoncée. Mais ce problème serait restreint à une seule solution, si l'on ajoutait cette condition, que l'ellipse à décrire doit toucher le milieu du côté $HT$; car alors on a

$$\alpha = \frac{n}{2} - a',$$

et l'équation (2) devenant, par le moyen de cette valeur, $\beta = \frac{m}{2}$, il s'ensuit que les équations (1) et (3) se changent respectivement en

$$a'^2 m^2 + b'^2 (n - 2a')^2 = 4 a'^2 b'^2, \qquad (1')$$

et

$$n = 3a'. \qquad (3')$$

Cette dernière donnant $a' = \frac{n}{3}$, la précédente fournira $m^2 + b'^2 = 4b'^2$, et par conséquent $b' = \sqrt{\frac{m^2}{3}} = OD$.

Le second demi-diamètre est donc moyen proportionnel entre $\frac{m}{3}$ et $m$ ; ou bien à cause de $OK = \frac{2m}{3}$, et de $PM = \frac{m}{2}$, ce même demi-diamètre est moyen proportionnel entre $OK$ et $PM$.

D'un autre côté, puisque $a' = \frac{n}{3}$, le centre $O$ de l'ellipse se trouve nécessairement sur la ligne $HM'$ qui aboutit au milieu de $GT$ : c'est une conséquence immédiate du théorême (n°. 51.)

Il est clair que si le triangle donné $GTH$ était isocèle, les lignes $AB$, $CD$ devraient être prises pour les axes mêmes de l'ellipse. On voit en outre que si ce triangle était équilatéral, on aurait $n = \sqrt{3m^2}$, et . . . . $AO = \frac{n}{3} = \sqrt{\frac{m^2}{3}}$, en même tems que l'on a. . . $OD = \sqrt{\frac{m^2}{3}}$ ; ainsi dans ce cas l'ellipse dégénère en cercle, comme on devait bien s'y attendre.

Ces valeurs particulières de $a'$ et $b'$ se déduiraient non moins facilement des expressions générales ; car il est aisé de trouver que

$$a' = \frac{(m-\beta)n}{2m-\beta}, \quad b' = m\sqrt{\frac{\beta}{2m-\beta}}.$$

Il est remarquable que l'ellipse, décrite suivant les conditions qui viennent d'être énoncées, est la plus grande de toutes celles qui sont inscriptibles dans le triangle $GHT$.

## PROBLÈME.

89. [Fig. 76.] *Décrire une courbe du second ordre qui passe par un point donné* M', *et qui soit tangente aux côtés d'un angle* MT m, *en deux points données* m, M.

Supposons que la courbe soit une ellipse. Joignez $m\,M$, et par le milieu $P$ de cette ligne, tirez $PT$ qui sera soutangente par rapport aux demi-diamètres conjugués $AB'$, $AC'$ formant entre eux un angle représenté par $TPM$; désignez par

$$\left.\begin{matrix}\alpha\,,\ \beta\\ \alpha',\ \beta'\end{matrix}\right\}\ \text{les coordonnées des points}\ \left\{\begin{matrix}M\\ M'\end{matrix}\right.$$

comptées à partir du centre $A$.

Soit de plus

$$AB' = a', \quad AC' = b', \quad PT = m, \quad PP' = n.$$

L'équation de l'ellipse, par rapport à ses diamètres, est

$$a'^2u^2 + b'^2t^2 = a'^2b'^2.$$

Or, pour les points $M$, $M'$ donnés, elle prendra la forme

$$a'^2\beta'^2 + b'^2\,(\alpha' + n)^2 = a'^2b'^2, \qquad (1)$$

et

$$a'^2\beta^2 + b'^2\alpha'^2 = a'^2b'^2. \qquad (2)$$

L'expression de la soutangente $PT$ ou $m$, est, pour l'abscisse $\alpha' + n$, ou $AP$,

$$m = \frac{a'^2 - (\alpha' + n)^2}{(\alpha' + n)}. \qquad (3)$$

et des équations (1) et (2), l'on obtient,

$$b'^2 = \frac{a'^2\beta^2}{a'^2 - (\alpha' + n)^2}, \qquad b'^2 = \frac{a'^2\beta'^2}{a'^2 - \alpha'^2},$$

égalant ces deux valeurs, l'on a, après la simplification nécessaire,

$$\beta^2 (a'^2 - \alpha'^2) = \beta'^2 [a'^2 - (\alpha' + n)^2];$$

et parce que l'équation (3) donne

$$a'^2 = m(\alpha' + n) + (\alpha' + n)^2,$$

on aura, en mettant cette valeur dans l'équation précédente,

$$\beta^2 m\alpha' + \beta^2 mn + 2\beta^2\alpha' n + \beta^2 n^2 = \beta'^2 m\alpha' + \beta'^2 mn,$$

d'où l'on tire

$$\alpha' = \frac{(\beta'^2 - \beta^2)\, mn - \beta^2 n^2}{2\beta^2 n - (\beta'^2 - \beta^2)\, m},$$

et par conséquent $AP$ ou

$$\alpha' + n = \frac{\beta^2 n^2}{2n\beta^2 - (\beta'^2 - \beta^2)\, m}. \qquad (A)$$

Maintenant que $\alpha' + n$ est connue, la valeur de $a'$ déduite de l'équation (3) sera exprimée par

$$\sqrt{m(\alpha' + n) + (\alpha' + n)^2},$$

et l'équation (1) donnera, pour l'expression du second demi-diamètre $b'$,

$$\frac{a'\beta}{\sqrt{a'^2 - (\alpha' + n)^2}}.$$

Les deux demi-diamètres conjugués étant connus, on pourra déterminer la grandeur des demi-axes de l'ellipse, et leur position à l'égard des diamètres. Quoique le calcul qu'exige cette détermination ne soit rien moins que difficile, nous l'entreprendrons en faveur de quelques lecteurs ; mais auparavant tirons quelques conséquences des résultats que nous venons d'obtenir.

Il peut arriver d'abord que les points $m$, $M$ soient également éloignés de $T$, en même tems que $a' = b'$ ; or, si ces deux circonstances ont lieu à la fois, l'angle $TPM$ sera droit, et la courbe elliptique se changera en circonférence de cercle. Il suit de là que

$$a'^2 = b'^2 = \frac{a'^2\beta^2}{a'^2 - (\alpha' + n)^2},$$

c'est-à-dire,

$$a'^2 = (\alpha' + n)^2 + \beta^2.$$

D'ailleurs $a'^2 = m(\alpha' + n) + (\alpha' + n)^2$ ; ainsi de ces deux valeurs on conclura

$$\alpha' + n = \frac{\beta^2}{m}.$$

Egalant en outre celle-ci avec la valeur $(A)$ obtenue plus haut, il en résultera $PT$ ou

$$m = \frac{2\beta^2 n}{n^2 + \beta'^2 - \beta^2}.$$

Telle est la hauteur qui convient au triangle isocèle, pour que la courbe à décrire soit un cercle.

Si, dans l'expression générale de $\alpha' + n = AP$, donnée par l'équation $(A)$, on avait $2n\beta^2 = (\beta'^2 - \beta^2)m$, ou

$m = \frac{2n\beta^2}{\beta'^2 - \beta^2}$ ; cette expression serait infinie, de même que les valeurs de $a'$ et de $b'$; ainsi l'ellipse deviendrait une parabole. Quant au sommet $B'$ de cette dernière courbe, on le déterminera en prenant $TB' = \frac{m}{2}$, parce que dans la parabole la soutangente $PT$ est double de l'abscisse $PB'$, l'origine des coordonnées étant rapportée au point $B'$. De plus, l'équation de cette courbe, pour le point $M$, et par rapport au diamètre $AB'$, est $\beta^2 = \frac{p'm}{2}$, $p'$ étant le paramètre. Par conséquent pour un point quelconque, on a

$$y'^2 = \frac{2\beta^2}{m} x'.$$

Enfin, si, dans l'équation $(A)$, $2n\beta^2 < (\beta'^2 - \beta^2)\, m$, ou $m > \frac{2n\beta^2}{\beta'^2 - \beta^2}$, le centre de la courbe cherchée sera situé à l'opposé de $AP$, c'est-à-dire en $A'$; et pour lors cette courbe sera une hyperbole, dont on déterminera les demi-axes au moyen des demi-diamètres conjugués. Voici à ce sujet le développement des calculs auxquels l'ellipse donne lieu.

90. *Les deux diamètres conjugués d'une ellipse étant donnés avec l'angle qu'ils forment entre eux, trouver les deux demi-axes.*

Il a été démontré (n^os. 146 et 147. *L. C.*) qu'entre les deux demi-axes $a$, $b$, et les deux demi-diamètres conjugués $a'$, $b'$ on a ces deux relations :

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2,$$
$$ab = a'b'f,$$

$f$ exprimant le sinus de l'angle formé par les diamètres conjugués.

Si l'on ajoute à la première, et si l'on soustrait de celle-ci le double de la seconde, on aura,

$$a^2 + b^2 + 2\,ab = a'^2 + b'^2 + 2\,a'b'f,$$
$$a^2 + b^2 - 2\,ab = a'^2 + b'^2 - 2\,a'b'f;$$

extrayant la racine carrée, il vient,

$$a + b = \sqrt{a'^2 + b'^2 + 2\,a'b'f},$$
$$a - b = \sqrt{a'^2 + b'^2 - 2\,a'b'f},$$

d'où l'on tire sur-le-champ,

$$2a = \sqrt{(a'^2 + b'^2 + 2a'b'f)} + \sqrt{(a'^2 + b'^2 - 2a'b'f)},$$
$$2b = \sqrt{(a'^2 + b'^2 + 2a'b'f)} - \sqrt{(a'^2 + b'^2 - 2a'b'f)}.$$

Ces quantités radicales se construisent commodément par le moyen du triangle obliquangle; car le premier radical se rapporte au triangle dont la perpendiculaire tombe au-dehors, et le second radical, au triangle dont la perpendiculaire tombe au-dedans.

[Fig. 77.] Soit pour cet effet abaissée de l'extrémité $C'$ du diamètre, la perpendiculaire $C'P$ sur son conjugué $AB'$, et soit prolongée $C'P$ de la quantité $C'D = AB'$; on aura pour l'expression du premier radical,

$$AD = \sqrt{\overline{AC'^2} + \overline{C'D^2} + 2\,C'D \times PC'}$$

$$= \sqrt{b'^2 + a'^2 + 2\,a'b'f}.$$

Soit en outre $C'PD' = AB'$ : on aura pour l'expression du second radical,

$$AD' = \sqrt{\overline{AC'^2} + \overline{C'D'^2} - 2\,C'D' \times PC'}$$

$$= \sqrt{b'^2 + a'^2 - 2\,a'b'f}.$$

Le reste de l'opération n'a plus maintenant aucune difficulté.

Quant à l'angle $C'AB$, voici comment on le déterminera : on tirera des équations,

$$a'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2n^2 + b^2m^2}, \qquad m^2 + n^2 = 1, \qquad (1)$$

obtenues dans le (n°. 146, *L. C.*) la valeur de $n$; c'est-à-dire, qu'en mettant pour $m^2$ sa valeur $1 - n^2$ dans la première équation, on aura

$$\sin C'AB = n = \frac{b}{a'}\sqrt{\frac{a^2 - a'^2}{a^2 - b^2}}.$$

Il en résulterait de même pour l'angle $BAB'$,

$$\sin BAB' = q = \frac{b}{b'}\sqrt{\frac{a^2 - b'^2}{a^2 - b^2}}.$$

Il existe un moyen d'obtenir les angles . . . . . $C'AB = t$, $B''AB = t'$ indépendamment des demi-dia-

mètres conjugués : en effet, l'équation de condition . . . $a^2nq + b^2mp = 0$, trouvée au n°. 140 (*L. C.*), pouvant être écrite ainsi,

$$\text{tang } \theta \text{ tang } \theta' = \frac{-b^2}{a^2};$$

parce que $\theta$ a pour sinus $n$, et $\theta'$ pour sinus $q$, il suffira alors de combiner cette équation avec cette autre :

$$\text{tang } (\theta' - \theta) = k, \quad \text{ou} \quad \frac{\text{tang } \theta' - \text{tang } \theta}{1 + \text{tang } \theta \text{ tang } \theta'} = k,$$

dans laquelle $\theta' - \theta$, qui est l'angle donné $B''AC'$, a une tangente connue $k$.

On procéderait d'une manière analogue pour l'hyperbole ; mais dans ce cas les valeurs de $a$ et de $b$, sont plus compliquées que celles qui conviennent à l'ellipse, et ne sont pas susceptibles d'une construction aussi simple. Ceux qui voudront connaître la solution du problème inverse de celui-ci pourront consulter les *Élémens de Géométrie analytique* par Garnier, page 222. Mais nous ne saurions trop le répéter, on ne peut bien se fortifier dans l'analyse qu'en cherchant à vaincre soi-même les difficultés qu'elle présente.

### PROBLÈME.

91. [Fig. 78.] *Trouver l'équation de la courbe* DM'Q *dont la propriété est telle que, menant d'un point fixe* A *donné de position par rapport à une ligne* CB, *des droites* AD, AM' *à tous ses points, chacune des parties* CD, MM' *de ces lignes soit d'une grandeur donnée* d.

Prenez pour coordonnées du système les droites $AX$,

$AY$ respectivement parallèles et perpendiculaires à la droite $CB$ donnée ; et soit

$$AC = b, \qquad CD = d,$$
$$AP' = x', \qquad PM' = y'.$$

L'équation de la droite $AM$ est $y = Ax$, ou . . . . $y = \frac{y'}{x'}x$. Celle de la droite $CB$, qui est constamment parallèle à $AX$, est $y = b$.

Ces deux équations étant accordées ensemble, donneront pour l'abscisse du point $M$, $x = \frac{bx'}{y'}$.

D'un autre côté, la distance $AM' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, et celle $AM = \frac{b}{y'}\sqrt{x'^2 + y'^2}$.

Or, à cause de $AM = AM' - MM'$, on aura,

$$AM = \sqrt{x'^2 + y'^2} - d ;$$

égalant cette valeur de $AM$ à la précédente, il en résultera

$$\frac{b}{y'}\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2} - d,$$

et en chassant les radicaux, on obtiendra pour l'équation demandée,

$$y'^4 - 2by'^3 + b^2y'^2 - d^2y'^2 + x'^2y'^2 - 2by'x'^2 + b^2x'^2 = 0.$$

La courbe à laquelle cette équation donne lieu, se nomme *conchoïde*. *Nicomède*, qui en est l'inventeur, s'en servit pour la résolution du problême de deux moyennes propor-

tionnelles. (*Hist. des Math.*, par Montucla, tom. 1. p. 255.) Il est visible que la droite $CB$ est l'asymptote de cette courbe.

Le problême dont nous parlons, et qui fut célèbre dans l'antiquité, est maintenant de peu d'intérêt pour les géomètres : considéré numériquement, sa solution dépend simplement de la résolution d'une équation du 3e. degré à deux termes. En voici une solution géométrique.

Soient $a$, $b$ les deux lignes entre lesquelles on veut insérer les deux moyens proportionnels $x$, $y$; on aura

$$a : x :: x : y :: y : b,$$

d'où l'on tire les deux équations suivantes,

$$x^2 - ay = 0, \qquad y^2 - bx = 0, \qquad (1)$$

qui donneraient les lieux de deux paraboles; mais en les ajoutant, on obtient

$$y^2 + x^2 - ay - bx = 0, \qquad (2)$$

Si, donc les axes des coordonnées sont rectangulaires, on aura les lignes $x$, $y$ cherchées, par les intersections de l'une des paraboles (1), et du cercle dont l'équation est (2). Telle est la solution géométrique la plus simple que l'on puisse donner à ce sujet.

On voit, par cet exemple, qu'une combinaison bien simple des équations (1) a donné lieu à une autre courbe susceptible d'être employée dans la solution cherchée. On aura, par la suite, d'autres occasions de s'assurer qu'il suffit quelquefois d'opérer d'une certaine manière sur les formules données immédiatement par les conditions d'un problême, pour en obtenir des constructions simples et élégantes.

PROBLÈME.

92. [Fig. 79.] *Trouver l'équation de la courbe* AMC *dont la propriété est telle que, si ayant décrit sur une droite donnée* AB *comme diamètre, le demi-cercle* AM'B, *et ayant élevé par le point* B *la perpendiculaire* BN, *on tire par le point* A *et par un point quelconque* M *de cette courbe, la droite* AMN *qui rencontre en* M' *la demi-circonférence, et en* N *la droite* BN, *on ait toujours* AM = M'N.

Soit la ligne donnée $AB = 2r$, et $x'$ $y'$ les coordonnées du point $M$ de la courbe proposée.

Puisque $AM$ doit être égale à $M'N$, quel que soit d'ailleurs l'angle $NAB$, il est clair que l'on aura dans la même circonstance $AP = P'B$; ainsi $AP' = 2r - x'$.

L'équation du cercle étant $y^2 = 2rx - x^2$, lorsque l'origine est au point $A$ de la circonférence ; on aura pour le point $M'$,

$$y'^2 = 2r(2r - x') - (2r - x')^2,$$

et l'équation de la droite $AN$ deviendra pour le même point,

$$y = \frac{y'}{x'}(2r - x').$$

Carrant celle-ci, et égalant son second membre à celui de l'équation précédente, on aura, réduction faite,

$$y'^2(2r - x') - x'^3 = 0.$$

C'est la *cissoïde* dont *Dioclès* fit usage pour résoudre le problême de la *duplication* du cube : problême qui a été traité au n°. 170 de l'*Applicat. de l'Alg. à la Géom.* de Lacroix.

Nous parlons de ces espèces de courbes, afin de faire voir que l'analyse s'applique à toutes les questions possibles de géométrie, et dans la vue de donner une idée des moyens ingénieux que les géomètres anciens avaient imaginés pour résoudre synthétiquement des problêmes qui étaient pour eux d'une grande difficulté, parce que l'algèbre leur était inconnue.

## PROBLÊME.

93. [Fig. 80.] *Quatre règles* AM′, Am′, M′M″, m′M″ *étant attachées ensemble en forme de parallélogramme, de manière qu'elles aient la liberté de tourner autour de leurs angles comme charnières; et les règles* m′M″, M′M″ *étant alongées des parties* mm′, MM′ *respectivement égales aux règles* Am′, AM′, *déterminer la nature des courbes qui seront décrites par les points* m, M″, *lorsque le système tournant autour du point* A *comme pivot, le point* M *parcourra une courbe connue.*

Soit pris le point fixe $A$ pour origine des coordonnées rectangles $AX$, $AY$, et appelons

$$\left.\begin{matrix} X, & Y \\ X', & Y' \\ X'', & Y'' \end{matrix}\right\} \text{les coordonnées des points} \left\{\begin{matrix} M, \\ M', \\ M'', \end{matrix}\right. \qquad \left.\begin{matrix} x, y \\ x', y' \end{matrix}\right\} \text{celles des points} \left\{\begin{matrix} m \\ m' \end{matrix}\right.$$

Faisons de plus $AM' = a$, $\qquad Am' = a'$.

*Première Solution.* Il résulte d'abord de la construction que les trois points $m$, $A$, $M$ sont en ligne droite ; car à cause des parallèles $mM''$, $AM'$ et $Am'$, $MM'$, les angles $mm'A$, $m'AM'$, $AM'M$ sont égaux ; d'où l'on doit conclure que les triangles $mm'A$, $AM'M$ isocèles sont nécessairement équiangles. Donc, quelle que soit la position de l'instrument, on aura toujours, entre les trois angles autour du point $A$, la relation

$$mAm' + m'AM' + M'AM = 2q;$$

$q$ désignant le quadrant ou le quart de la circonférence.

Maintenant si l'on mène $A'M$ parallèle à $AP$, et que l'on prolonge les ordonnées $P'M'$, $P''M''$ jusques en $N'$, $N''$, le sinus de l'angle $M'MN'$ sera exprimé par le rapport $\frac{M'N'}{M'M} = \frac{P''M'' - P'M'}{M''M'}$ ; d'où l'on tire, par l'emploi des valeurs algébriques,

$$a(Y'' - Y') = a'(Y' + Y). \qquad (1)$$

De même le cosinus de l'angle $M'MN'$, aura pour expression, $\frac{N'M}{M'M} = \frac{A'N' - A'N''}{M''M'}$ ; ainsi,

$$a(X' - Y'') = a'(X - X'). \qquad (2)$$

D'un autre côté le triangle rectangle $M'N'M$ donne cette équation,

$$(Y' + 1)^2 + (X - X')^2 = a^2,$$

qui étant développée et simplifiée, au moyen de la relation $X'^2 + Y'^2 = a^2$, fournie par le triangle $AP'M'$, se

réduit à

$$X^2 + Y^2 - 2XX' - 2YY' = 0. \qquad (3)$$

Cela posé, si on résout les équations (1) et (2) par rapport à $Y'$ et $X'$, on aura,

$$Y' = \frac{aY'' - a'Y}{a + a'}, \qquad X' = \frac{aX'' + a'X}{a + a'}.$$

Ensuite, si on met ces valeurs dans l'équation (3), et dans la relation $X'^2 + Y'^2 = a^2$, il viendra,

$$(a - a')(X^2 + Y^2) = 2a(X''X - Y''Y). \qquad (A)$$

$$(a'X + aX'')^2 + (aY'' - a'Y)^2 = a^2(a + a')^2. \qquad (B)$$

On obtient, par rapport aux points $m$, $m'$, $M''$, des équations analogues à celles $(A)$, $(B)$ qui sont relatives aux points $M$, $M'$, $M''$; et il suffit pour cela de changer dans celles-ci $X$ en $-x$; $Y$ en $-y$; $a$ en $a'$, *et vice versâ*; ce qui donne,

$$(a' - a)(x^2 + y^2) = -2a'(X''x - Y''y), \qquad (A')$$

$$(a'X'' - ax)^2 + (a'Y'' + ay)^2 = a'^2(a + a')^2. \qquad (B')$$

Ce changement est fondé sur ce que les coordonnées $x$, $y$ sont respectivement dans une situation opposée à celle des coordonnées $X$, $Y$, et qu'elles doivent, pour cette raison, être affectées de signes différens. Au reste, on pourra parvenir directement à ces derniers résultats par une marche semblable à celle que nous venons de suivre.

Le système d'équations $(A')$, $(B')$ étant, à la différence des signes près, le même que celui qui est désigné par $(A)$, $(B)$, on est en droit de conclure que si le point $M$

parcourt une courbe, le point $m$ en décrit une semblable, et dont le rapport à l'autre est comme $a' : a$. Il est visible en outre, que ces équations, étant jointes avec l'équation de la courbe parcourue par un des points $m$, $M''$, $M$, suffiront pour déterminer la nature des courbes décrites par les deux autres points; car, à cause des six inconnues $X$, $Y$, $x$, $y$, $X''$, $Y''$, et de la coexistence de cinq équations, on arrivera toujours, par l'élimination, à une équation entre deux des inconnues que l'on considère.

Supposons, pour exemple, que le point $M$ parcoure une droite donnée par l'équation $Y = 0$ (c'est, comme l'on sait, l'axe même des abscisses), déterminer la courbe que décrit en même tems le point $M''$.

Les équations $(A)$, $(B)$ qui se rapportent au mouvement du point $M$ deviendront, en y faisant $Y = 0$,

$$(a - a')\,X = 2\,aX''$$
$$(a'X + aX'')^2 + a^2 Y''^2 = a^2 (a + a')^2 ;$$

et en éliminant $X$ de la seconde, au moyen de sa valeur prise dans la première, on aura

$$a^2 Y''^2 + \left(aX'' + \frac{2\,aa'X''}{a - a'}\right)^2 = a^2\,(a + a')^2 ,$$

d'où l'on tire, pour l'équation de l'ellipse décrite par le point $M''$,

$$(a - a')^2\,Y''^2 + (a + a')^2\,X''^2 = (a + a')^2\,(a - a')^2 .$$

Si, dans cette équation, l'on fait $Y'' = 0$, on aura l'expression du demi-petit axe de l'ellipse pris sur $AX$ : en y faisant au contraire $X'' = 0$, on obtiendra l'expression

du demi-grand axe pris sur $AY$; Dans le premier cas l'on a

$$X'' = a - a',$$

et dans le second

$$Y'' = a + a'.$$

Il suit de là que si deux axes $m$, $n$ d'une ellipse sont donnés, on trouvera les longueurs des deux règles $a$, $a'$, de manière que le point $M$ parcourant une droite, le point $M''$ décrive en même tems l'ellipse demandée. En effet, l'on aurait

$$m = 2(a + a'), \qquad n = 2(a - a')$$

et par suite,

$$a = \frac{m+n}{2}, \qquad a' = \frac{m-n}{2}.$$

Ce moyen très-simple de décrire l'ellipse par un mouvement continu est plus commode que celui qui consiste à faire tracer cette courbe par un des points d'une règle dont les extrémités sont assujéties à glisser le long de deux autres règles faisant entre elles un angle quelconque.

2°. *Solution.* On pourrait au surplus, par des considérations particulières, obtenir à moindres frais l'équation de la courbe décrite par le point $M''$, lorsque le point $M$ parcourt une droite, et c'est à quoi l'analyse suivante va nous conduire.

Soient $x''$, $y''$ les coordonnées de $m''$ [Fig. 81.], et adoptons d'ailleurs la même construction et la même notation que précédemment, en faisant de plus . . . $M'm'' = M'M'' = a'$.

Cela posé, le triangle $AM'M$ étant isocèle, on a $AP' = PM$, et $AP'' = p''M$.

D'un autre côté, la courbe $CM'B$ étant évidemment un cercle dont le rayon est $AM'$, on a entre les coordonnées du point $M'$ la relation

$$X'^2 + Y'^2 = a^2; \qquad (m)$$

et parce que le sinus de l'angle $M'MA = \frac{Y''}{a+a'} = \frac{Y'}{a}$;

d'où $$Y' = \frac{Y''a}{a+a'};$$

que son cosinus $= \frac{X'}{a} = \frac{X''}{a-a'}$;

d'où $$X' = \frac{aX''}{a-a'},$$

l'équation $(m)$ deviendra

$$\frac{a^2X''^2}{(a-a')^2} + \frac{a^2Y''^2}{(a+a')^2} = a^2;$$

ou bien comme ci-dessus,

$$(a-a')^2Y''^2 + (a+a')^2X''^2 = (a+a')^2(a-a')^2.$$

Il n'est pas difficile de prouver que quel que soit l'angle $AM'M$, la longueur de la droite $MN$ est toujours égale à $2a$.

Les jeunes mathématiciens, qui cultivent le dessin topographique, verront sans doute avec plaisir que le problême que je viens de résoudre d'une manière générale, renferme implicitement toute la théorie du pantographe. La nature de cet Ouvrage ne me permet pas d'étendre plus loin ces considérations; mais ils peuvent

voir mon *Traité de Topographie, d'Arpentage et de Nivellement*, sur ce qui a rapport à la théorie et à l'usage de cet instrument.

## PROBLÈME.

94. *Faire passer une courbe par plusieurs points donnés.*

[Fig. 82] Soient.

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha'\\ \beta'\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha''\\ \beta''\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha'''\\ \beta'''\end{matrix}\right\} \text{ etc.}$$

les coordonnées respectives des points connus,

$$M \qquad M' \qquad M'' \qquad M'''.$$

Il est évident que, puisque dans l'énoncé du problème rien n'indique l'espèce de courbe qui doit passer par les points que l'on considère, on peut donner à volonté tant de solutions que l'on voudra, en faisant usage des courbes qui soient, ou non, susceptibles d'être exprimées par des équations ; mais pour nous arrêter aux solutions les plus aisées à employer, nous observons avec M. Lagrange ; « Que quoique le cercle soit après la ligne droite « la courbe la plus facile à décrire, elle ne l'est pas par « son équation entre les coordonnées rectangles. Sous « ce dernier point de vue, on peut regarder comme les « plus simples les courbes dont l'ordonnée est exprimée « par une fonction entière et rationnelle de l'abscisse, « telle que

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots$$

« Ces sortes de courbes se nomment en général *paraboliques*, parce que l'on peut les considérer comme une « généralisation de la parabole qui a lieu lorsque l'équation n'a que les trois premiers termes. On en a déja vu « l'usage dans la théorie de la composition des équations (n°. 172 *L. C.*); et leur considération est toujours utile dans la gradation des courbes, car l'on « peut toujours faire passer une courbe de ce genre par « tant de points que l'on voudra d'une courbe proposée, « puisqu'il n'y a qu'à prendre autant de coefficiens indéterminés $A$, $B$, $C$, $D$..... que l'on considère de « points, et déterminer ces coefficiens de manière que « les abscisses et les ordonnées pour ces points soient « données. Or, il est clair que quelle que puisse être la « courbe proposée, la courbe parabolique, ainsi traitée, « en différera d'autant moins, que le nombre des points « donnés sera plus grand, et leur distance moindre. »

En effet, dans la circonstance actuelle, on a entre les coordonnées des points $M$, $M'$, $M''$, $M'''$, qui appartiennent à la courbe parabolique, les relations

$$\begin{aligned}
\beta &= A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + \ldots\ldots \\
\beta' &= A + B\alpha' + C\alpha'^2 + D\alpha'^3 + \ldots\ldots \\
\beta'' &= A + B\alpha'' + C\alpha''^2 + D\alpha''^3 + \ldots\ldots \\
\beta''' &= A + B\alpha''' + C\alpha'''^2 + D\alpha'''^3 + \ldots\ldots
\end{aligned}$$

desquelles on peut tirer, par l'élimination ordinaire au premier degré, les valeurs des coefficiens, $A$, $B$, $C$, $D$... mais ces valeurs s'obtiennent encore avec plus de facilité par le procédé suivant.

Si l'on soustrait les équations précédentes l'une de l'autre, on aura

$$\beta' - \beta = B(\alpha' - \alpha) + C(\alpha'^2 - \alpha^2) + D(\alpha'^3 - \alpha^3) + \ldots.$$
$$\beta'' - \beta' = B(\alpha'' - \alpha') + C(\alpha''^2 - \alpha'^2) + D(\alpha''^3 - \alpha'^3) + \ldots.$$
$$\beta''' - \beta'' = B(\alpha''' - \alpha'') + C(\alpha'''^2 - \alpha''^2) + D(\alpha'''^3 - \alpha''^3) + \ldots.$$

Ces restes étant respectivement divisibles par $\alpha' - \alpha$, $\alpha'' - \alpha'$, $\alpha''' - \alpha''$, on obtiendra pour quotiens,

$$(Q)\begin{cases} \dfrac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = B + C(\alpha' + \alpha) + D(\alpha'^2 + \alpha'\alpha + \alpha^2) + \\ \dfrac{\beta'' - \beta'}{\alpha'' - \alpha'} = B + C(\alpha'' + \alpha') + D(\alpha''^2 + \alpha''\alpha' + \alpha'^2) + \\ \dfrac{\beta''' - \beta''}{\alpha''' - \alpha''} = B + C(\alpha''' + \alpha'') + D(\alpha'''^2 + \alpha'''\alpha'' + \alpha''^2) + \end{cases}$$

Les valeurs des fractions qui composent les premiers membres de ces équations sont connues; ainsi, faisons pour abréger,

$$\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = \gamma, \quad \frac{\beta'' - \beta'}{\alpha'' - \alpha'} = \gamma', \quad \frac{\beta''' - \beta''}{\alpha''' - \alpha''} = \gamma'' \ldots.$$

On trouvera de cette manière

$$(Q') \quad \frac{\gamma' - \gamma}{\alpha'' - \alpha} = C + D(\alpha'' + \alpha' + \alpha) \ldots.$$
$$\frac{\gamma'' - \gamma'}{\alpha''' - \alpha'} = C + D(\alpha''' + \alpha'' + \alpha') \ldots.$$

Soit de même, pour abréger,

$$\frac{\gamma' - \gamma}{\alpha'' - \alpha} = \delta, \quad \frac{\gamma'' - \gamma'}{\alpha''' - \alpha'} = \delta' \ldots.$$

on trouvera

$$\frac{\delta'' - \delta}{\alpha''' - \alpha} = D \ldots\ldots \text{ et ainsi de suite.}$$

On voit par là que les valeurs des coefficiens $A$, $B$, $C$, $D$.... s'obtiennent à partir des dernières. Pour donner un exemple de cette détermination, supposons que l'équation précédente soit terminée à $\frac{\gamma' - \gamma}{\alpha'' - \alpha} = C$, ou, ce qui est de même, que l'on n'ait que trois points donnés $M$, $M'$, $M''$, auquel cas l'équation proposée sera

$$y = A + Bx + Cx^2;$$

et les quotiens $(Q)$, $(Q')$ se réduiront à

$$\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = B + C(\alpha' + \alpha) = \gamma, \qquad (1)$$

$$\frac{\beta'' - \beta'}{\alpha'' - \alpha'} = B + C(\alpha'' + \alpha') = \gamma',$$

$$\frac{\gamma' - \gamma}{\alpha'' - \alpha} = C = \delta.$$

Substituant la valeur de $C$ dans l'équation (1), on aura

$$B = \gamma - \delta\alpha' - \delta\alpha.$$

Substituant de même les valeurs de $C$ et de $B$ dans l'équation

$$\beta = A + B\alpha + C\alpha^2,$$

on aura, après avoir réduit,

$$A = \beta - \gamma\alpha - \delta\alpha\alpha';$$

en mettant ces valeurs de $A$, $B$, $C$ dans l'équation

proposée, il viendra,

$$y = \beta + \gamma(x - \alpha) + \delta(x - \alpha)(x - \alpha').$$

Le même artifice de calcul, employé dans la détermination d'un plus grand nombre de coefficiens, conduirait à cette formule plus étendue, et dont la loi est facile à saisir,

$$y = \beta + \gamma(x-\alpha) + \delta(x-\alpha)(x-\alpha') + \varepsilon(x-\alpha)(x-\alpha')(x-\alpha'') \ldots\ldots$$

M. Lagrange, qui rapporte cette solution d'après Newton, (*Cahiers de l'École Normale*), observe que l'on peut parvenir à un plus grand degré de simplicité par la considération suivante :

« Puisque, continue cet illustre géomètre, $y$ doit devenir $\beta$, $\beta'$, $\beta''$ .... lorsque $x$ devient $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ .... il est aisé de voir que l'expression de $y$ sera de cette forme,

$$y = A'\beta + B'\beta' + C'\beta'' + \ldots\ldots$$

« où les quantités $A'$, $B'$, $C'$.... doivent être exprimées en $x$, de manière qu'en faisant $x = \alpha$, on ait $A' = 1$, $B' = 0$, $C' = 0$.... que de même en faisant $x = \alpha'$, on ait $A' = 0$, $B' = 1$, $C' = 0$.... qu'en faisant $x = \alpha''$, on ait pareillement $A' = 0$, $B' = 0$, $C' = 1$.... ainsi de suite; d'où il est facile de conclure que les valeurs de $A'$, $B'$, $C'$..., doivent avoir la forme

$$A' = \frac{(x-\alpha')(x-\alpha'')(x-\alpha''')}{(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'')(\alpha-\alpha''')} \ldots$$

$$B' = \frac{(x-\alpha)(x-\alpha'')(x-\alpha''')}{(\alpha'-\alpha)(\alpha'-\alpha'')(\alpha'-\alpha''')} \ldots$$

$$C' = \frac{(x-\alpha)(x-\alpha')(x-\alpha''')}{(\alpha''-\alpha)(\alpha''-\alpha')(\alpha''-\alpha''')}\cdots$$

. . . . . .

« en prenant autant de facteurs dans les numérateurs et « dans les dénominateurs, qu'il y aura de points donnés « de la courbe moins un. »

« Cette dernière expression de $\gamma$, quoique sous une « forme différente de la première, revient cependant au « même, comme on peut s'en assurer par le calcul, en « développant les valeurs $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$..... et ordonnant les « termes suivant les quantités $\beta$, $\beta'$, $\beta''$.... mais elle « est préférable par la simplicité de l'analyse sur laquelle « elle est fondée, et par sa forme même qui est beau- « coup plus commode pour le calcul. Il suit de là que l'on « pourra construire géométriquement tant de termes in- « termédiaires que l'on voudra d'une série quelconque « composée de plusieurs termes : ce qui est fort utile pour « remplir les lacunes qui pourraient se trouver dans des « suites d'observations ou d'expériences, ou dans des tables « calculées par des formules ou des constructions données », et c'est en quoi consiste la *méthode d'interpolation*.

# TROISIÈME SECTION.

## GÉOMÉTRIE AUX TROIS DIMENSIONS.

## CHAPITRE PREMIER.

### *De la Polyédrométrie.*

95. LORSQUE les Géomètres se furent occupés de la recherche des propriétés des figures planes rectilignes, ils ne tardèrent pas à découvrir plusieurs théorêmes remarquables sur les polyèdres; néanmoins, cette partie de la géométrie des solides, dans laquelle on considère les diverses relations qui subsisent entre les angles dièdres et leurs faces, est encore trop peu avancée pour former une doctrine complète. Par cette raison je ne m'attacherai, comme dans le 1^er^. chapitre de la deuxième section, qu'à faire connaître quelques-uns des théorêmes élégans que l'on doit à MM. Lhuilier et Carnot. Quant aux propositions que l'on a coutume de considérer dans les élémens, et qui se rapportent à la polyédrométrie, on en trouvera l'analyse détaillée dans la *Géométrie* de Legendre.

LEMME.

*Si on projette une surface plane sur un autre plan, par des perpendiculaires à celui-ci, la projection de cette surface sera égale à son aire multipliée par le cosinus de l'angle des deux plans.*

Ainsi, soit $a$ l'aire projetée, $b$ sa projection orthogonale, et $\theta$ l'angle des deux plans; on aura

$$b = a \cos \theta, \quad \text{ou} \quad b = a \cos (a, b),$$

en désignant l'angle dièdre $\theta$ par $(a, b)$.

Je ne donnerai point la démonstration de ce lemme, parce qu'elle se trouve dans les ouvrages élémentaires auxquels celui-ci se rattache; mais je tirerai pour conséquence de cette proposition le théorême suivant.

THÉORÊME.

96. *L'aire de l'une des faces d'un polyèdre quelconque est égale à la somme des aires de toutes les autres faces multipliées par le cosinus de l'angle qu'elles forment avec le plan de projection.*

Soient $a$, $b$, $c$, $d$..... les aires des faces d'un polyèdre; on aura en vertu du lemme précédent, et en prenant successivement chacune de ces faces pour plan de projection,

$$\left.\begin{aligned} a &= b\cos(a,b) + c\cos(a,c) + d\cos(a,d)\ldots\ldots \\ b &= a\cos(b,a) + c\cos(b,c) + d\cos(b,d)\ldots\ldots \\ c &= a\cos(c,a) + b\cos(c,b) + d\cos(c,d)\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (A)$$

. . . . . .

Les angles $(a, b)$, $(a, c)$..... désignant les angles dièdres intérieurs du polyèdre.

## THÉORÈME.

97. *Si on nomme* base *d'un polyèdre une quelconque de ses faces, le produit d'une face par le sinus de son inclinaison sur la base, est égal à la somme des produits de chacune des autres faces par le sinus de son inclinaison sur la base, et par le cosinus de l'angle formé par les communes sections du plan de la base avec la première face et avec celle des faces restantes qui est prise comme facteur.*

Multipliant successivement les deux membres de la première des équations $(A)$ du n°. précédent par les coefficiens de $a$ dans les suivantes, et ajoutant les produits aux membres correspondans de ces dernières, on trouvera pour résultats indépendans de la face $a$,

$$\begin{aligned} b\sin^2(a,b) = {} & c\left[\cos(b,c) + \cos(a,b)\cos(a,c)\right] \\ & + d\left[\cos(b,d) + \cos(a,b)\cos(a,d)\right] \end{aligned}$$

. . . . . .

$$c\sin^2(a,c) = b\,[\cos(b,c) + \cos(a,b)\cos(a,c)] + d\,[\cos(c,d) + \cos(a,c)\cos(a,d)]$$

. . . . . .

et ainsi de suite.

Maintenant si on désigne par $\beta\alpha\gamma$ l'angle formé par les deux communes sections du plan de la base $a$ avec chacune des faces $b$, $c$; et qu'on adopte une dénomination pareille relativement aux autres faces, on aura à cause de. . . . . .

$\cos(b,c) + \cos(a,b)\cos(a,c) = \sin(a,b)\sin(a,c)\cos(\beta\alpha\gamma)$,

(*Trigon.* de Legendre, art. 81), les équations suivantes,

$$b\sin(a,b) = c\sin(a,c)\cos(\beta\alpha\gamma) + d\sin(a,d)\cos(\beta\alpha\delta) + \text{etc.}$$

$$c\sin(a,c) = b\sin(a,b)\cos(\beta\alpha\gamma) + d\sin(a,d)\cos(\gamma\alpha\delta) + \text{etc.}$$

. . . . . .

ce qu'il fallait prouver.

## THÉORÈME.

98. *Dans tout polyèdre le carré de la moitié de sa surface est égal à la somme des produits de toutes les faces multipliées deux à deux, et par le carré du cosinus de leur demi-inclinaison.*

Cette propriété se reconnaît d'abord, car si, après avoir multiplié chacune des équations du n°. 96 par son premier membre, on ajoute ensemble toutes ces équations, et qu'aux deux membres de l'équation résultante on ajoute encore le double produit de toutes les

faces prises deux à deux, on aura à cause de . . . . . $\frac{1+\cos(a,b)}{2} = \cos^2\frac{1}{2}(a,b)$, etc....., l'équation suivante,

$$\left(\frac{a+b+c+\ldots\ldots}{2}\right)^2 = ab\cos^2\tfrac{1}{2}(a,b) + ac\cos^2\tfrac{1}{2}(a,c) + ad\cos^2\tfrac{1}{2}(a,d) + \text{etc.....},$$

qui est précisément la traduction analytique de l'énoncé du théorême.

## THÉORÊME.

99. *La somme des carrés de toutes les faces d'un polyèdre, est égale au double de la somme des produits de toutes ces faces multipliées deux à deux, et par le cosinus de l'angle dièdre qu'elles comprennent.*

En effet, si on multiplie les deux membres des équations (*A*) du n°. 96, respectivement par $a, b, c, d\ldots$, et qu'on ajoute tous ces produits, on aura, comme le porte l'énoncé du théorême,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots\ldots = 2ab\cos(a,b) + 2ac\cos(a,c) + 2ad\cos(a,d) + 2bc\cos(b,c) + \text{etc.....}$$

Ainsi, les polyèdres jouissent, par rapport à leurs faces et aux angles qu'elles forment, de la même propriété que les polygones à l'égard de leurs côtés et des angles qu'ils comprennent (n°. 27). Cette remarque s'étend au théorême suivant.

THÉORÈME.

100. *Dans tout polyèdre le carré d'une face est égal à la somme des carrés des autres faces, moins deux fois la somme des produits de toutes ces autres faces multipliées deux à deux, et par le cosinus de l'angle dièdre qu'elles comprennent.*

Opérant comme dans le n°. 27, on a sur-le-champ

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 \ldots - 2[bc\cos(b,c) + bd\cos(b,d) + \ldots].$$

Ainsi, pour la pyramide triangulaire qui est, parmi les polyèdres, le corps le plus simple, on a

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2[bc\cos(b,c) + bd\cos(b,d) + cd\cos(c,d)].$$

Mais lorsqu'un des angles trièdres est formé de trois angles droits ; par exemple, lorsque les faces $b$, $c$, $d$ sont des triangles rectangles, les angles dièdres $(b,c)$, $(b,d)$, $(c,d)$ sont droits, et pour lors l'expression précédente se réduit à

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2;$$

c'est-à-dire, que *dans un tétraèdre rectangle le carré de la face opposée à l'angle trirectangle est égal à la somme des carrés des trois autres faces* ; propriété analogue à celle du triangle rectangle.

De Gua, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1783, avait déja démontré ce cas particulier ; mais MM. Lhuilier et Carnot sont les premiers qui l'aient généralisé, l'un dans sa *Polyédrométrie* (*Mém. présentés*

à *l'Institut* par les savans étrangers, tom. I), l'autre dans sa *Géométrie de position*. On trouvera, dans le premier ouvrage, le développement du procédé à suivre pour *déterminer la somme des produits d'un nombre quelconque de masses par les carrés de leurs distances à un point quelconque*. C'est encore M. Lhuilier qui a démontré (*Mémoires de Berlin*, année 1786), ce théorême, savoir : *si d'un point pris dans l'intérieur d'un polyèdre on abaisse des perpendiculaires sur ses faces, et que sur ces perpendiculaires on prenne, depuis ce point, des droites qui soient entre elles comme ces faces, ce point sera le centre commun de gravité de poids égaux placés aux extrémités de ces perpendiculaires.*

Ces propositions peuvent être traitées avec assez de simplicité en faisant usage des principes de la polyédrométrie.

# CHAPITRE II.

## *Des équations du point, de la ligne droite et du plan, considérés dans l'espace; et de quelques propriétés des projections.*

101. JE n'énoncerai ici, comme dans le chapitre 2 de la II^e. section, que la plupart des propositions préliminaires relatives à la ligne droite et au plan, parce qu'elles se trouvent résolues dans l'*Appendice à l'application de l'algèbre à la géométrie*, de Lacroix, et dans le 1^er. volume de son *Traité de calcul différentiel*. Au défaut de ces ouvrages, on peut voir aussi sur cette matière la 1^re. partie de la *Géométrie analytique*, par MM. Monge et Hachette, ou le *Traité analytique des courbes et des surfaces du premier et du second degré*, par Biot, etc.

Un point est donné dans l'espace par ses distances à trois plans coordonnés, et

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma$$

sont les équations de ce point. Deux d'entre elles appartiennent à sa projection sur un des plans coordonnés; les deux premières, par exemple, déterminent la projection du point sur le plan des $xy$.

Il est évident que les équations précédentes sont aussi celles de trois plans respectivement parallèles aux plans

des $yz$, $xz$, $xy$. Le point proposé est donc le sommet de l'angle trièdre que les trois premiers plans font entre eux : cette conséquence est encore vraie par rapport à des plans coordonnés obliques.

102. Si deux points ont respectivement pour coordonnés rectangulaires $xyz$, $x'y'z'$, leur distance sera exprimée par

$$\sqrt{(x-x')^2-(y-y')^2+(z-z')^2};$$

ainsi l'équation de la surface de la sphère, rapportée de même à des coordonnées rectangulaires, est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2;$$

$R$ dénotant le rayon, et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant les coordonnées du centre ; il est évident que lorsque l'origine des axes est à ce point, on a seulement

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

telle est l'équation la plus simple de la sphère.

103. Une droite est déterminée par les équations de deux plans projetans qui la contiennent ; ainsi

$$x=az+\alpha, \quad y=bz+\beta$$

fixent cette droite dans l'espace.

De ces deux équations, il résulte une troisième que l'on obtient en éliminant $z$, et qui appartient à la troisième projection de la droite sur le plan des $xy$.

104. Une droite qui passe par un point donné $x'y'z'$, a pour équation

$$x-x'=a(z-z'), \quad y-y'=b(z-z').$$

Deux droites sont parallèles dans l'espace lorsque les intersections de leurs plans projetans avec les plans coordonnés sont elles-mêmes parallèles ; d'où il suit que si

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

sont les équations de la première droite,

$$x = az + \alpha', \quad y = bz + \beta',$$

seront celles de la seconde.

105. Deux droites, qui ont pour équations aux coordonnées rectangles

$$\left.\begin{aligned} x &= az + \alpha \\ y &= bz + \beta \end{aligned}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{aligned} x &= a'z + \alpha' \\ y &= b'z + \beta' \end{aligned}\right.$$

et qui se coupent dans l'espace, forment un angle $V$, dont le sinus, le cosinus et la tangente sont respectivement

$$\sin V = \frac{\sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2 + (ab' - a'b)^2}}{\sqrt{(1+a^2+b^2)(1+a'^2+b'^2)}},$$

$$\cos V = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{(1+a^2+b^2)(1+a'^2+b'^2)}},$$

$$\operatorname{tang} V = \frac{\sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2 + (ab' - a'b)^2}}{1 + aa' + bb'}.$$

Lorsque cet angle $V$ est droit, on a $\cos V = 0$, et par conséquent

$$1 + aa' + bb' = 0.$$

Si l'une de ces droites, la seconde, par exemple, coïncide avec l'axe des $z$, dont les équations sont $x = 0$,

$y=0$, on aura $a'=0$, $b'=0$; et en désignant par $Z$ l'angle que la première droite fait avec cet axe, on obtiendra

$$\cos Z = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

De même, si $Y$ et $X$ sont les angles que cette droite fait avec les axes des $y$ et des $x$, on aura

$$\cos Y = \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, \quad \cos X = \frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

Il suit de là qu'en ajoutant les carrés de ces trois dernières équations, on parviendra à cette relation remarquable,

$$\cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1,$$

laquelle consiste en ce que *la somme des carrés des cosinus des angles qu'une droite fait avec les trois angles rectangles, est égale au carré du rayon.*

106. Lorsque deux droites sont dans un même plan, on a nécessairement, entre les constantes qui entrent dans leurs équations (n°. 105), la relation

$$(a'-a)(b'-b)-(\beta'-\beta)(a'-a)=0.$$

107. L'équation générale du plan est

$$Ax+By+Cz+D=0;$$

et comme on peut lui donner la forme suivante

$$z=ax+by+c,$$

sans lui rien ôter de sa généralité, il s'ensuit que des

quatre constantes $A$, $B$, $C$, $D$, trois seulement sont nécessaires pour particulariser ce plan. On pourra donc, dans les applications, égaler à l'unité un de ces coefficiens, ou bien le déterminer par des conditions particulières; le plus souvent on les conserve tous quatre, afin de rendre les calculs plus symétriques.

On obtient les équations des lignes suivant lesquelles un plan rencontre les plans coordonnés, en faisant successivement $z=0$, $y=0$, $x=0$, dans l'équation de ce plan. Ces lignes d'intersection se nomment aussi les *traces* du plan proposé sur ceux des $xy$, $xz$, $yz$.

Si un plan est assujéti à passer par trois points $x'y'z'$, $x''y''z''$, $x'''y'''z'''$, son équation générale fournira les relations suivantes;

$$\begin{aligned} Ax' + By' + Cz' + D &= 0, \\ Ax'' + By'' + Cz'' + D &= 0, \\ Ax''' + By''' + Cz''' + D &= 0; \end{aligned}$$

et de là on tire aisément

$$\begin{aligned} A &= z'(y''-y''') + z''(y'''-y') + z'''(y'-y''), \\ B &= x'(z''-z''') + x''(z'''-z') + x'''(z'-z''), \\ C &= y'(x''-x''') + y''(x'''-x') + y'''(x'-x''), \\ D &= x'(y''z'''-y'''z'') + x''(y'''z'-y'z''') + x'''(y'z''-y''z'). \end{aligned}$$

En soustrayant la première des équations précédentes de l'équation générale $Ax+By+Cz+D=0$, on a

$$A(x-x') + B(y-y') + C(z-z') = 0.$$

C'est celle d'un plan passant par un point donné $x'y'z'$.

Il est remarquable que si $t$, $t'$, $t''$ sont, sur les plans des $xy$, $xz$, $yz$, les aires des projections du triangle

formé par les droites qui joignent deux à deux les points donnés, on aura

$$t = \tfrac{1}{2}C, \quad t' = \tfrac{1}{2}B, \quad t'' = \tfrac{1}{2}A.$$

108. Deux plans ou deux surfaces quelconques qui se coupent, ont, à leurs points d'intersection, les mêmes coordonnés; d'où il suit que si, de leurs équations qui ont lieu en même tems, on élimine une des variables, le résultat sera l'équation de la projection de la ligne d'intersection des deux surfaces sur le plan désigné par les deux autres variables.

Deux plans qui sont parallèles ont, sur les plans coordonnés, leurs traces respectivement parallèles : ainsi, lorsque les équations de ces plans sont

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + B' = 0,$$

on a, pour les conditions du parallélisme,

$$\frac{A}{C} = \frac{A'}{C'}, \quad \frac{B}{C} = \frac{B'}{C'}, \quad \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'};$$

dont une d'elles est nécessairement comportée par les deux autres.

109. Une droite est perpendiculaire à un plan lorsque les projections de cette droite sont perpendiculaires aux traces de ce plan; d'où il suit que si, en supposant les plans coordonnés rectangulaires,

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

sont les équations de la droite, on

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

l'équation du plan, on aura, pour les conditions de la perpendicularité,

$$a = \frac{A}{C}, \quad b = \frac{B}{C};$$

par conséquent l'équation du plan deviendra

$$ax + by + z + \frac{D}{C} = 0.$$

Pour trouver la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point donné sur un plan connu, soient $x'\ y'\ z'$ les coordonnées de ce point : les équations de la perpendiculaire seront

$$x - x' = \frac{A}{C}(z - z'), \quad y - y' = \frac{B}{C}(z - z');$$

d'un autre côté, la longueur $P$ de cette perpendiculaire aura pour expression

$$P = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

$xyz$ étant considérées comme les coordonnées rectangles de son pié. Mais en substituant pour $x - x'$ et $y - y''$ leurs valeurs ci-dessus, il viendra

$$P = \frac{z - z'}{C}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2};$$

et comme à l'équation du plan, on peut donner la forme

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') + Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$

on obtiendra, en éliminant $x - x'$ et $y - y'$,

$$\frac{z - z'}{C} = -\frac{Ax' + By' + Cz' + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

De là, il est aisé de conclure que

$$P = \pm \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

le signe supérieur ayant lieu, si l'on veut, pour le cas où la perpendiculaire est au-dessus du plan, et le signe inférieur pour le cas où elle est au-dessous.

110. Si les équations de deux plans sont

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

et que $V$ désigne l'angle qu'ils forment, on aura, en supposant toujours les plans coordonnés rectangulaires,

$$\cos V = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}, \quad (m)$$

Dans le cas où ces deux plans sont perpendiculaires entre eux, on a $\cos V = 0$, et pour lors

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

Lorsque l'un de ces plans est le plan même des $xy$, dont l'équation est $z = 0$; on a $A' = 0$, $B' = 0$, $C' = 1$ et $D' = 0$, et partant, pour le cosinus de l'angle $p$ que l'autre plan fait avec celui-ci,

$$\cos p = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (1)$$

on aura de même pour le cosinus de l'angle $p'$ qu'il fait avec le plan $xz$

$$\cos p' = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad (2)$$

et pour le cosinus de l'angle $p''$ qu'il fait avec le plan $yz$

$$\cos p'' = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (3)$$

Ces trois dernières équations conduisent à cette relation

$$\cos^2 p + \cos^2 p' + \cos^2 p'' = 1, \quad (n)$$

qui est analogue à celle du n°. 105.

Si on désigne par $q$, $q'$, $q''$ les inclinaisons du second plan $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ sur chacun des plans coordonnés $xy$, $xz$, $yz$, il est évident qu'à cause des équations (1) (2) (3), celle $(m)$ deviendra

$$\cos V = \cos p \cos q + \cos p' \cos q' + \cos p'' \cos q'' \quad (m')$$

Enfin, si $r$, $r'$, $r''$ sont les inclinaisons d'un troisième plan $A''x + B''y + C''z + D'' = 0$ sur les mêmes plans coordonnés, il est incontestable que lorsque ces trois nouveaux plans seront perpendiculaires entre eux, on aura les six relations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
\cos^2 p + \cos^2 p' + \cos^2 p'' &= 1,\\
\cos^2 q + \cos^2 q' + \cos^2 q'' &= 1,\\
\cos^2 r + \cos^2 r' + \cos^2 r'' &= 1,\\
\cos p \cos q + \cos p' \cos q' + \cos p'' \cos q'' &= 0,\\
\cos p \cos r + \cos p' \cos r' + \cos p'' \cos r'' &= 0,\\
\cos q \cos r + \cos q' \cos r' + \cos q'' \cos r'' &= 0.
\end{aligned}\right\} (T)$$

111. On peut trouver aisément, d'après ce qui précède, l'angle qu'une droite fait avec un plan. En effet, soient

$$x = az + \alpha, \qquad y = bz + \beta,$$

les équations de la droite, et

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

celle du plan ; si par l'origine on conçoit un plan perpendiculaire à la droite, son équation, qui est de la forme $A'x + B'y + C'z = 0$, deviendra, à cause de $a = \frac{A'}{C'}$, $b = \frac{B'}{C'}$,

$$ax + by + z = 0;$$

et l'angle qu'il formera avec le plan donné sera nécessairement le complément de l'angle cherché $V$; on aura donc (n°. 110.)

$$\sin V = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Il suit de là que l'équation

$$aA + bB + C = 0$$

exprimera que la droite et le plan sont parallèles.

112. La relation $(n)$ trouvée dans le n°. 110 donne le moyen de démontrer ce théorême, savoir : *si une figure plane quelconque est projetée sur trois plans rectangulaires, le carré de l'aire de cette figure sera égal à la somme des carrés des aires de ses trois projections* ; car soit $S$ une surface plane, et $A$, $A'$, $A''$, ses trois projections respectives sur les plans $xy$, $xz$, $yz$, on aura

$$A^2 = S^2\cos^2 p, \quad A'^2 = S^2\cos^2 p', \quad A''^2 = S^2\cos^2 p'';$$

$p$, $p'$, $p''$ ayant les mêmes significations que ci-dessus ; donc, en vertu de la relation citée,

$$S^2 = A^2 + A'^2 + A''^2.$$

Supposons maintenant que $B$, $B'$, $B''$ soient les projections de l'aire $S$ projetée sur trois autres plans rectangulaires, on aura pareillement.

$$S^2 = B^2 + B'^2 + B''^2;$$

donc

$$A^2 + A'^2 + A''^2 = B^2 + B'^2 + B''^2.$$

Ce résultat apprend que quelle que soit la position des trois plans rectangulaires de projection qui forment le second système, la somme $B^2 + B'^2 + B''^2$ sera toujours constante pour une même valeur de $S$. On tire de là

$$B = \sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2 - B'^2 - B''^2};$$

ainsi la plus grande valeur que puisse acquérir la projection $B$, c'est lorsque $B' = 0$, $B'' = 0$. Avant de déterminer, dans ce cas, la position du plan de $B$, à l'égard des trois plans rectangulaires $A$, $A'$, $A''$, je vais faire connaître une autre propriété des projections qui sert de base à cette recherche.

Soit $V$ l'angle que $S$ forme avec $B$; on aura d'abord

$$B = S \cos V;$$

et parce que

$$A = S \cos p, \quad A' = S \cos p', \quad A'' = S \cos p'',$$

il est clair que si on désigne par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les inclinaisons du plan de $B$ sur ces mêmes plans rectangulaires $A$, $A'$, $A''$, l'équation $(m')$ qui donne la valeur de cos $V$, se changera en celle-ci,

$$\cos V = \cos \alpha \cos p + \cos \beta \cos p' + \cos \gamma \cos p''.$$

Or, en multipliant chaque membre par $S$, on obtient

$$B = A\cos\alpha + A'\cos\beta + A''\cos\gamma,$$

on a de même

$$B' = A\cos\alpha' + A'\cos\beta' + A''\cos\gamma',$$
$$B'' = A\cos\alpha'' + A'\cos\beta'' + A''\cos\gamma'',$$

$\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ étant les inclinaisons du plan de $B'$ sur les plans rectangulaires $A$, $A'$, $A''$, et $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$, les inclinaisons du plan de $B''$ sur ces mêmes plans. Donc, *la projection orthogonale d'une aire quelconque sur un plan est égale à la somme des projections de projections formées, en projetant d'abord cette aire sur trois plans rectangulaires, ensuite en projetant ces projections sur le plan proposé.*

Lorsque $V=0$, on a $p=\alpha$, $p'=\beta$, $p''=\gamma$; c'est le cas particulier qui se trouve démontré par une autre voie dans la *Géométrie de position*, n°. 265.

Du principe général que l'on vient de découvrir, il résulte réciproquement que

$$\left.\begin{aligned} A &= B\cos\alpha + B'\cos\alpha' + B''\cos\alpha'', \\ A' &= B\cos\beta + B'\cos\beta' + B''\cos\beta'', \\ A'' &= B\cos\gamma + B'\cos\gamma' + B''\cos\gamma'', \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

puisque les plans $B$, $B'$, $B''$ sont perpendiculaires entre eux. D'ailleurs il est évident qu'il existe entre les neuf cosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, etc., les relations (10) et (11) du n°. 116; si donc l'on multipliait respectivement les valeurs précédentes de $B$, $B'$, $B''$, par $\cos\alpha$, $\cos\alpha'$, $\cos\alpha''$, et qu'on ajoutât entre eux les produits, on aurait encore, en réduisant toutefois à l'aide des relations citées, la valeur

de $A$. Un procédé analogue donnerait de même les valeurs de $A'$ et de $A''$.

Le plan qui répond à la plus grande projection dont il a été parlé plus haut, joue un rôle très-important en mécanique : voici comment on en détermine la position.

Les équations $B' = 0$, $B'' = 0$, qui caractérisent ce plan, réduisent alors celles désignées par (1) à

$$A = B\cos\alpha; \quad A' = B\cos\beta, \quad A'' = B\cos\gamma;$$

or, $\alpha$ est l'inclinaison du plan de la plus grande projection $B$ sur le plan $A$; par conséquent, si on dénote par $\varphi$ l'angle que l'intersection de ces deux plans forme avec la trace du plan de $A''$ sur le plan de $A$, la position du plan de $B$ sera déterminée par ces deux angles; et il est aisé de voir que l'une des propriétés du triangle sphérique rectangle fournit ces deux relations,

$$\sin\alpha\sin\varphi = \cos\beta, \quad \sin\alpha\cos\varphi = -\cos\gamma;$$

donc

$$\cos\alpha = \frac{A}{B} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}},$$

$$\sin\alpha\sin\varphi = \frac{A'}{B} = \frac{A'}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}},$$

$$\sin\alpha\cos\varphi = \frac{-A''}{B} = \frac{-A''}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}};$$

et divisant ces deux dernières équations l'une par l'autre, on a

$$\operatorname{tang}\varphi = -\frac{A'}{A''}.$$

Ainsi, toutes les fois que l'on connaîtra les sommes $A$, $A'$, $A''$, des projections sur trois plans rectangulaires

choisis arbitrairement, la position du plan de la plus grande projection se déterminera immédiatement à l'aide des formules

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}}, \quad \text{tang}\,\varphi = -\frac{A'}{A''}. \quad (2)$$

Si on représente par $\theta$ l'inclinaison d'un autre plan $T$ sur celui de la plus grande projection, la somme $T$ des projections sur ce nouveau plan sera donnée par l'équation

$$T = \sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2} \times \cos\theta, \quad (3)$$

de laquelle on pourra tirer la valeur de l'angle $\theta$, quand la somme $T$ des projections sera connue.

Tous les problèmes possibles sur les projections des aires trouveront leurs solutions dans les formules (2) et (3). Il n'est pas de mon sujet d'appliquer à la mécanique les propriétés géométriques que je viens de démontrer, d'après M. Poisson. J'observerai seulement que, dans un système de corps en mouvement dans l'espace et soumis à leurs actions réciproques, il existe un plan dont on peut déterminer la position à chaque instant, et qui, ainsi que l'illustre auteur de la *Mécanique céleste* l'a reconnu et démontré le premier, jouit de la propriété remarquable d'être toujours parallèle à lui-même; mais M. Poisson a eu l'heureuse idée de déduire ce beau théorême sur le *plan invariable*, des considérations géométriques précédentes. (*Voyez* le n°. 10 de la *Correspondance sur l'École Polytechnique*).

113. Il est aisé de se convaincre que les équations de la ligne droite et du plan sont toujours de mêmes formes, soit qu'elles se rapportent à des coordonnées

rectangulaires, soit qu'elles se rapportent à des coordonnées obliques; mais les coefficiens des variables ont, par rapport au second système, une signification toute différente de celle relative aux coordonnées rectangulaires; c'est ce que j'ai déja observé au n°. 34. Il importe donc de faire savoir comment on doit modifier ceux des résultats précédens qui dépendent des angles des coordonnées. Voici, à ce sujet, quelques-unes des formules publiées par M. Lefrançais: je laisserai au lecteur le plaisir de les retrouver lui-même; d'ailleurs, la marche à suivre dans cette circonstance est suffisamment indiquée par celle que j'ai tracée au n°. 39, pour qu'il soit inutile d'entrer dans de grands développemens.

Soient $x, y, z$ les coordonnées obliques d'un point $M$ de l'espace et $A$ leur origine; soit en outre $AM = \rho$, on aura (n°. 115)

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos(x,y) + 2xz\cos(x,z) + 2yz\cos(y,z)$$

et en faisant $x = a\rho$, $y = b\rho$, $z = c\rho$, les équations de la droite $AM$ seront

$$cx = az, \qquad cy = bz,$$

d'où il est aisé de conclure que

$$(a) \quad 1 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos(x,y) + 2ac\cos(x,z) + 2bc\cos(y,z).$$

Si des extrémités de $x$ et $y$, on abaisse des perpendiculaires sur $AM$, on trouvera que

$$\rho = x\cos(\rho,x) + y\cos(\rho,y) + z\cos(\rho,z);$$

partant

$$(b) \quad 1 = a\cos(\rho, x) + b\cos(\rho, y) + c\cos(\rho, z).$$

A cause de l'identité des équations $(a)$, $(b)$, on a

$$(c) \quad \begin{cases} \cos(\rho, x) = a + b\cos(x, y) + c\cos(x, z), \\ \cos(\rho, y) = b + c\cos(y, z) + a\cos(x, y), \\ \cos(\rho, z) = c + a\cos(x, z) + b\cos(y, z); \end{cases}$$

et si on a égard à ce que

$$a = \frac{\sin(\rho, yz)}{\sin(x, yz)}, \quad b = \frac{\sin(\rho, xz)}{\sin(y, xz)}, \quad c = \frac{\sin(\rho, xy)}{\sin(z, xy)},$$

les équations $(a)$, $(b)$, $(c)$ fourniront des relations entre les différens angles du système des coordonnées et de la droite $\rho$.

Pour une autre droite $AM' = \rho'$, dont les équations seraient

$$\rho' = \frac{x'}{a'} = \frac{y'}{b'} = \frac{z'}{c'},$$

on aurait évidemment entre $a'b'c'$ les mêmes relations que celles que nous venons d'obtenir entre $abc$.

Il résulte de là, et de ce que le carré de la droite, qui joint les extrémités de $\rho$ et $\rho'$, est

$$\begin{aligned} \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos(\rho, \rho') &= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \\ &+ 2(x - x')(y - y')\cos(x, y) + 2(x - x')(z - z')\cos(x, z) \\ &+ 2(y - y')(z - z')\cos(y, z), \end{aligned}$$

il résulte, dis-je, que

$$\begin{aligned} \cos(\rho, \rho') &= a'\cos(\rho, x) + b'\cos(\rho, y) + c'\cos(\rho, z) \\ &= a\cos(\rho', x) + b\cos(\rho', y) + c\cos(\rho', z). \end{aligned}$$

La ligne $AM = \rho$ mesurant la distance de l'origine des axes à un plan passant par le point $M$ et perpendiculaire à cette ligne, il s'ensuit que la valeur précédente de $\rho$, en y faisant $\cos(\rho, x) = A$, $\cos(\rho, y) = B$, $\cos(\rho, z) = C$, représentera l'équation de ce plan, c'est-à-dire qu'on aura

$$Ax + By + Cz = \rho,$$

et pour lors l'équation $(b)$, qui pourra être écrite ainsi,

$$Aa + Bb + Cc = 1, \qquad (d)$$

exprimera la condition à laquelle devront satisfaire les coefficiens $a$, $b$, $c$, $A$, $B$, $C$, pour que la droite soit perpendiculaire au plan ; enfin les équations $(c)$ donneront les coefficiens de ce plan.

De ces dernières équations l'on tirerait, par voie d'élimination et en ayant égard à la formule fondamentale de la résolution des triangles sphériques,

$$a = \sin(y,z)\,[A\sin(y,z) - B\sin(x,z)\cos(xz,yz) - C\sin(x,y)\cos(xy,yz)] : R^2,$$

$$b = \sin(x,z)\,[B\sin(x,z) - C\sin(x,y)\cos(xy,xz) - A\sin(y,z)\cos(xz,yz)] : R^2,$$

$$c = \sin(x,y)\,[C\sin(x,y) - A\sin(y,z)\cos(xy,yz) - B\sin(x,z)\cos(xy,xz)] : R^2,$$

où l'on a

$$R^2 = 1 - \cos^2(x,y) - \cos^2(x,z) - \cos^2(y,z) + 2\cos(x,y)\cos(x,z)\cos(y,z);$$

par conséquent l'équation $(d)$ se change en celle-ci,

$$\left.\begin{aligned} &A^2\sin^2(y,z)+B^2\sin^2(x,z)+C^2\sin^2(x,y)\\ &-2AB\sin(y,z)\sin(x,z)\cos(xz,yz)\\ &-2AC\sin(y,z)\sin(x,y)\cos(xy,yz)\\ &-2BC\sin(x,z)\sin(x,y)\cos(xy,xz)\end{aligned}\right\}=R^2.$$

On verra, au n°. où je traite des propriétés de la pyramide triangulaire, une manière plus simple d'obtenir cette relation; on y trouvera aussi d'autres valeurs de $R^2$, à l'aide desquelles on pourrait donner d'autres formes aux équations ci-dessus. Au surplus, ceux qui éprouveraient des difficultés pour tirer toutes les conséquences dont la théorie précédente est susceptible, ne peuvent mieux faire que de consulter le 1^er^. paragraphe du n°. 9 de la *Correspondance sur l'École impériale Polytechnique*; ils y verront, par exemple, que si $A'x+B'y+C'z=\varrho'$ est l'équation d'un plan perpendiculaire à $\varrho'$, la valeur ci-dessus de $\cos(\varrho,\varrho')$ qui prend cette forme, . . . . . $aA'+bB'+cC'$, exprime le sinus de l'angle formé par ce plan et la droite $\varrho$, et que cette même valeur prise négativement est le cosinus de l'angle des deux plans que l'on considère ici.

# CHAPITRE III.

## *Transformation des Coordonnées.*

114. LE changement le plus simple que l'on puisse faire à un système de coordonnées, est de déplacer l'origine en laissant les nouveaux axes parallèles aux premiers : or, si $x'$, $y'$, $z'$ désignent les coordonnées positives d'un point rapporté au second système, et que $a$, $b$, $c$ soient celles de la nouvelle origine, rapportée au système primitif, on aura

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c.$$

Mais pour embrasser, dans toute sa généralité, le problême de la transformation des axes, prenons pour premier système de coordonnées obliques, $x$, $y$, $z$; et pour second système, $t$, $u$, $v$: puis cherchons les premières coordonnées en valeurs des dernières, en considérant les unes et les autres comme étant relatives au même point de l'espace et étant rapportées à la même origine.

Pour cet effet, concevons, par exemple, par les extrémités des coordonnées $v$, $u$, $t$, $x$, des plans parallèles au plan des $yz$; ces plans seront au nombre de quatre, et la distance du plan $yz$ au second sera visiblement $\sin(v, yz)$; celle du second au troisième, $u \sin(u, yz)$;

celle du troisième au quatrième, $t \sin (t, yz)$ ; enfin celle du premier au quatrième, $x \sin (x, yz)$. Mais cette dernière distance se compose de la somme des trois autres, donc

$$x \sin (x, yz) = t \sin (t, yz) + u \sin (u, yz) + v \sin (v, yz) ;$$

pareillement

$$y \sin (y, xz) = t \sin (t, xz) + u \sin (u, xz) + v \sin (v, xz),$$
$$z \sin (z, xy) = t \sin (t, xy) + u \sin (u, xy) + v \sin (v, xy).$$

Ces formules, qui sont très-simples et très-symétriques, s'obtiennent, comme l'on voit, avec la plus grande facilité ; elles servent toutes les fois que l'on connaît les angles que les nouveaux axes font avec les plans coordonnés primitifs. M. Lefrançais qui a résolu le même problême en supposant que les axes des coordonnées $xyz$, $t\,u\,v$ sont rapportés à six plans dont les équations aux axes rectangles sont connues, est parvenu à ces formules par un calcul analytique un peu long, mais d'ailleurs fort élégant ; *Voyez* le 14^e^. cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, page 182 et suivantes. M. Hachette a aussi démontré les formules de M. Lefrançais, par des considérations déduites de la théorie des projections. *Voyez* la *Correspondance*, 1^er^. numéro du 2^e^. volume.

115. Si les axes primitifs seulement étaient rectangulaires, on aurait $\sin (z, xy) = 1, \ldots$ ; $\sin (t, xy) = \cos (t, z), \ldots$, et les formules dont il s'agit se réduiraient à

$$x = t \cos (t, x) + u \cos (u, x) + v \cos (v, x),$$
$$y = t \cos (t, y) + u \cos (u, y) + v \cos (v, y),$$
$$z = t \cos (t, z) + u \cos (u, z) + v \cos (v, z).$$

Ces formules particulières étant les plus usitées, nous allons les retrouver par une méthode qui nous fera connaître en même tems les relations qui existent entre les coefficiens de $t$, $u$, $v$.

Supposons donc qu'il s'agisse de passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un système de coordonnées obliques, de manière que les axes $AX$, $AY$, $AZ$, [Fig. 83] forment le premier système, et que $AT$, $AU$, $AV$ composent le second.

Construisons sur ces derniers axes un parallélipipède $AM$, et désignons par

$$x'y'z', \qquad x''y''z'', \qquad x'''y'''z''',$$

les coordonnées rectangulaires des points

$$M', \qquad M'', \qquad M''',$$

comptées de l'origine $A$;

Par $c'$, $c''$, $c'''$, les côtés du triangle $M'$, $M''$, $M'''$ respectivement opposés aux angles $M'$, $M''$, $M'''$;

Par $\gamma'$, $\gamma''$, $\gamma'''$, les angles plans $M'''AM''$, $M''AM'$, $M''AM'$ opposés aux côtés $c'$, $c''$, $c'''$;

Enfin par $t$, $u$, $v$, les arêtes ou coordonnées obliques $AM'$, $AM''$, $AM'''$; on aura évidemment

$$\left.\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 &= t^2 \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 &= u^2 \\ x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 &= v^2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} (x'' - x''')^2 + (y'' - y''')^2 + (z'' - z''')^2 &= c'^2 \\ (x' - x''')^2 + (y' - y''')^2 + (z' - z''')^2 &= c''^2 \\ (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2 &= c'''^2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

D'un autre côté, en vertu de la propriété du triangle

obliquangle, les trois triangles $M'''AM''$, $M'''AM'$, $M''AM'$, donneront respectivement

$$\left.\begin{aligned} u^2 + v^2 - 2uv\cos\gamma' &= c'^2 \\ t^2 + v^2 - 2tv\cos\gamma'' &= c''^2 \\ t^2 + u^2 - 2tu\cos\gamma''' &= c'''^2 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Par conséquent, si on développe les premiers nombres des équations (2), et que l'on substitue pour $c'^2$, $c''^2$, $c'''^2$ leurs valeurs précédentes, on aura, réductions faites,

$$\left.\begin{aligned} x''x''' + y''y''' + z''z''' &= uv\cos\gamma' \\ x'x''' + y'y''' + z'z''' &= tv\cos\gamma'' \\ x'x'' + y'y'' + z'z'' &= tu\cos\gamma''' \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Maintenant, considérons le point $M$ comme étant situé d'une manière quelconque dans l'espace, et représentons par $x$, $y$, $z$ ses coordonnées rectangles $Ap$, $pm$, $mM$; il est clair, alors, que l'on aura

$$x = x' + x'' + x''', \quad y = y' + y'' + y''', \quad z = z' + z'' + z''';$$

si donc $X$, $Y$, $Z$, $X'$, $Y'$, $Z'$, $X''$, $Y''$, $Z''$, sont les angles que les arêtes $t$, $u$, $v$ font avec les trois axes primitifs $AX$, $AY$, $AZ$, on aura évidemment

$$\left.\begin{aligned} x' &= t\cos X, \; y' = t\cos Y, \quad z' = t\cos Z \\ x'' &= u\cos X', \; y'' = u\cos Y', \; z'' = u\cos Z' \\ x''' &= v\cos X'', \; y''' = v\cos Y'', \; z''' = v\cos Z'' \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

de là,

$$\left.\begin{aligned} x &= t\cos X + u\cos X' + v\cos X'' \\ y &= t\cos Y + u\cos Y' + v\cos Y'' \\ z &= t\cos Z + u\cos Z' + v\cos Z'' \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

et il s'ensuivra que les équations (4) se changeront en celles-ci,

$$\left.\begin{aligned}
&\cos X'\cos X''+\cos Y'\cos Y''+\cos Z'\cos Z''=\cos\gamma'\\
&\cos X\cos X''+\cos Y\cos Y''+\cos Z\cos Z''=\cos\gamma''\\
&\cos X\cos X'+\cos Y\cos Y'+\cos Z\cos Z'=\cos\gamma'''
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

D'un autre côté, si on ajoute ensemble les carrés des valeurs de $x'$, $y'$, $z'$, de $x''$, $y''$, $z''$, et de $x'''$, $y'''$, $z'''$, fournies par les équations (5), on trouvera de la manière la plus simple les relations connues

$$\left.\begin{aligned}
&\cos^2 X+\cos^2 Y+\cos^2 Z=1\\
&\cos^2 X'+\cos^2 Y'+\cos^2 Z'=1\\
&\cos^2 X''+\cos^2 Y''+\cos^2 Z''=1
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Celles-ci et les précédentes renferment toutes les conditions relatives aux nouveaux axes obliques.

On peut déduire de là l'expression du carré de la diagonale $AM$ du parallélipipède; car soit $D$ cette diagonale, on a

$$D^2=x^2+y^2+z^2;$$

Puis faisant usage des valeurs (6), et réduisant au moyen des relations (7) et (8), il viendra

$$D^2=t^2+u^2+v^2+2tu\cos\gamma'''+2tv\cos\gamma''+2uv\cos\gamma';$$

c'est-à-dire que le *carré de la diagonale d'un parallélipipède est égal à la somme des carrés des arêtes d'un même angle trièdre, plus à la somme faite du double des produits de ces arêtes prises deux à deux, multipliés par le cosinus de l'angle que ces mêmes arêtes forment entre elles.*

116. Si on voulait seulement passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre système de même nature, il suffirait de faire dans les résultats ci-dessus $\gamma' = \gamma'' = \gamma''' = 100^g$. ; or, en vertu de cette hypothèse, et désignant d'ailleurs pour abréger, cos $X$, cos $Y$, cos $Z$ par $m$, $n$, $p$, les équations (6), (7) et (8) deviennent respectivement

$$\left.\begin{aligned} x &= mt + m'u + m''v \\ y &= nt + n'u + n''v \\ z &= pt + p'u + p''v \end{aligned}\right\} \qquad (6')$$

$$\left.\begin{aligned} m'm'' + n'n'' + p'p'' &= 0 \\ m\,m'' + n\,n'' + p\,p'' &= 0 \\ mm' + nn' + pp' &= 0 \end{aligned}\right\} (7') \qquad \left.\begin{aligned} m^2 + n^2 + p^2 &= 1 \\ m'^2 + n'^2 + p'^2 &= 1 \\ m''^2 + n''^2 + p''^2 &= 1 \end{aligned}\right\} (8')$$

ainsi des neuf constantes qui entrent dans les formules (6'), trois seulement sont indépendantes (*).

On pourrait demander maintenant de déterminer $t$, $u$, $v$ en fonctions de $x$, $y$, $z$; dans ce cas, au lieu de suivre la voie ordinaire de la résolution des équations du premier degré, il est plus élégant de procéder ainsi qu'il suit.

---

(*) Quelques auteurs conservent, dans leurs calculs, les dénominations de *cos*, *sin*, etc.; mais cela est inutile, sur-tout toutes les fois que, dans le cours d'une longue opération, les valeurs trigonométriques ne doivent éprouver aucune espèce de transformation. D'ailleurs, en représentant chacune de ces valeurs par une seule lettre, comme les autres quantités, les calculs s'effectuent bien plus rapidement. On a dû voir déja que je me suis conformé à cette observation, lorsque je n'ai pas eu en vue de faire remarquer que telle formule était identique avec celle publiée par d'autres auteurs, ou était précisément la traduction analytique de l'énoncé d'un théorème.

Si on multiplie respectivement par $m$, $n$, $p$, les valeurs de $x$, $y$, $z$ données par les équations (6′), et qu'on ajoute les trois produits entre eux, on aura, à cause des relations (7′) et (8′),

$$t = mx + ny + pz.$$

Répétant la même opération deux autres fois de suite, en choisissant d'abord pour nouveaux multiplicateurs $m'$, $n'$, $p'$, puis $m''$, $n''$, $p''$; les trois résultats réunis seront

$$\left.\begin{aligned} t &= mx + ny + pz \\ u &= m'x + n'y + p'z \\ v &= m''x + n''y + p''z \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

et parce que, dans l'hypothèse actuelle, le carré de la distance $AM$ est

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2 + u^2 + v^2;$$

on trouvera, après avoir substitué dans cette équation identique, pour $t$, $u$, $v$ leurs valeurs précédentes, et comparé les termes homologues, ces nouvelles relations

$$\left.\begin{aligned} mn + m'n' + m''n'' &= 0 \\ mp + m'p' + m''p'' &= 0 \\ np + n'p' + n''p'' &= 0 \end{aligned}\right\} (10) \qquad \left.\begin{aligned} m^2 + m'^2 + m''^2 &= 1 \\ n^2 + n'^2 + n''^2 &= 1 \\ p^2 + p'^2 + p''^2 &= 1 \end{aligned}\right\} (11)$$

concluons de là que si on avait les équations

$$\begin{aligned} aa' + bb' + cc' &= 0, & a^2 + b^2 + c^2 &= R^2, \\ aa'' + bb'' + cc'' &= 0, & a'^2 + b'^2 + c'^2 &= R'^2, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0; & a''^2 + b''^2 + c''^2 &= R''^2, \end{aligned}$$

on en déduirait celles-ci,

$$\frac{ab}{R^2}+\frac{a'b'}{R'^2}+\frac{a''b''}{R''^2}=0, \quad \frac{a^2}{R^2}+\frac{a'^2}{R'^2}+\frac{a''^2}{R''^2}=1,$$

$$\frac{ac}{R^2}+\frac{a'c'}{R'^2}+\frac{a''c''}{R''^2}=0, \quad \frac{b^2}{R^2}+\frac{b'^2}{R'^2}+\frac{b''^2}{R''^2}=1,$$

$$\frac{bc}{R^2}+\frac{b'c'}{R'^2}+\frac{b''c''}{R''^2}=0; \quad \frac{c^2}{R^2}+\frac{c'^2}{R'^2}+\frac{c''^2}{R''^2}=1,$$

puisqu'alors on aurait

$$m=\frac{a}{R}, \quad n=\frac{b}{R}, \quad p=\frac{c}{R},$$

$$m'=\frac{a'}{R'}, \quad n'=\frac{b'}{R'}, \quad p'=\frac{c'}{R'},$$

$$m''=\frac{a''}{R''}, \quad n''=\frac{b''}{R''}, \quad p''=\frac{c''}{R''}.$$

Ces résultats nous seront utiles par la suite.

117. Si l'on prenait l'axe des $t$ dans le plan même des $xy$, et que l'on supposât toujours les deux autres axes perpendiculaires entre eux et à celui-ci, il est clair que l'on aurait $Z=100^{gr}$. En désignant alors $X$ par $\varphi$ et $Z''$ par $\theta$, on aurait $Y=100^{gr}-\varphi$ et $Z'=100^{gr}-\theta$; partant les formules (6′) deviendraient, en y faisant d'ailleurs $\theta=0$, pour ne considérer que les points situés dans le plan $tu$,

$$\left.\begin{aligned} x&=t\cos\varphi+u\cos X' \\ y&=t\sin\varphi+u\cos Y' \\ z&=u\sin\theta \end{aligned}\right\} \qquad (6'')$$

Dans la même hypothèse, la troisième des équations (7′) se réduirait à

$$\cos\varphi\cos X'+\sin\varphi\cos Y'=0;$$

et la seconde des équations (8'), à

$$\cos^2 X' + \cos^2 Y' = \cos^2 \theta.$$

De ces deux dernières on tire aisément les valeurs suivantes :

$$\cos X' = \sin \theta \cos \theta \quad \text{et} \quad \cos Y' = -\cos \varphi \cos \theta.$$

Les valeurs précédentes de $x$, $y$, $z$ sont donc

$$\left.\begin{aligned} x &= t \cos \varphi + u \sin \varphi \cos \theta \\ y &= t \sin \varphi - u \cos \varphi \cos \theta \\ z &= u \sin \theta \end{aligned}\right\} \qquad (6'')$$

Telles sont les formules propres à donner l'équation aux axes rectangles de la courbe d'intersection d'une surface courbe quelconque et d'un plan. On remarquera dans ces formules, que $\varphi$ est l'angle que la trace $AR$ [Fig. 84] du plan sécant $TAU$ fait avec l'axe des $x$; et que $\theta$ est l'inclinaison de ce plan sur celui des $xy$.

118. Au lieu de prendre la ligne $AR$ [Fig. 85] pour l'axe des $t$, considérons-la, pour plus de généralité, comme la trace du plan des $tu$ sur celui des $xy$; regardons la droite $AT$ comme l'axe des $t$, et nommons $\psi$ l'angle $TAR$. Dans cette circonstance, l'angle $\theta$ sera encore celui des $tu$ avec le plan $xy$, mais l'angle $\varphi$ désignera celui que la trace $AR$ fait avec l'axe des $x$.

Maintenant pour exprimer les valeurs de cos $X$, cos $Y$, cos $Z$, etc. en fonctions des angles $\varphi$, $\psi$, $\theta$, nous aurons recours à la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique, parce qu'elle conduit au but de la manière la plus simple et la plus directe. Pour cet effet, concevons une sphère du rayon $AT = 1$, et ayant

son centre au point $A$ ; puis imaginons des arcs de grands cercles $TQ$, $TR$, $QRS$, $TS$; alors les côtés $TR$, $TQ$, $RQ$ du triangle sphérique $TRQ$ seront respectivement $\psi$, $X$, $\varphi$; et l'angle sphérique $R$ sera $= \theta$ : de sorte que l'on aura sur-le-champ par le principe du n°. 76 de la *Trigonométrie* de Legendre, ou du n°. 47 de la *Trigonométrie* de Lacroix,

$$\cos X = \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi \cos \theta.$$

Le triangle sphérique $STR$ dans lequel $ST = Y$, $TR = \psi$, $SR = 100^{gr} - \varphi$, et l'angle $R = 200^{gr} - \theta$, donnera de même

$$\cos Y = \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \theta.$$

Ensuite, si par l'axe des $z$ et celui des $t$ on fait passer un arc de grand cercle $ZTP = 100^{gr}$, le triangle sphérique $PRT$ sera rectangle en $P$ et fournira cette relation,

$$\cos Z = \sin \theta \sin \psi.$$

Soit $AU$ [Fig. 86], l'axe des $u$ perpendiculaire à celui des $t$; les deux triangles sphériques $URQ$, $URS$ dans lesquels $UQ = X'$, $UR = 100^{gr} + \psi$, $US = Y'$, $RS = 100^{gr} - \varphi$, donneront aussi, en vertu du principe cité,

$$\cos X' = \cos \theta \cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi,$$
$$\cos Y' = -\cos \psi \cos \varphi \cos \theta - \sin \psi \sin \varphi;$$

et si par les axes $z$, $u$, on conçoit un arc de grand cercle $ZUL = 100^{gr}$, le triangle sphérique rectangle $URL$ donnera

$$\cos Z' = \cos \psi \sin \theta.$$

Digitized by Google

Soit en outre $AV$ [Fig. 87], l'axe des $v$ perpendiculaire au plan $tu$, si on imagine les arcs de grands cercles $VNQ$, $TRK$, $VSK$, les deux triangles sphériques $NQR$, $KSR$ seront visiblement rectangles, l'un en $N$, l'autre en $K$, et donneront

$$-\cos X'' = \sin\phi \sin\theta; \quad \cos Y'' = \cos\phi \sin\theta.$$

Enfin il est assez évident que l'on aura

$$Z'' = \theta, \quad \text{ou} \quad \cos Z'' = \cos\theta.$$

Concluons de là que les formules (6) et (9) n°. 115, deviendront respectivement

$$\begin{aligned} x = {} & t(\cos\theta \sin\phi \sin\psi + \cos\phi \cos\psi) \\ & + u(\cos\theta \sin\phi \cos\psi - \cos\phi \sin\psi) \\ & - v \sin\theta \sin\phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = {} & t(\sin\phi \cos\psi - \cos\theta \cos\phi \sin\psi) \\ & - u(\cos\theta \cos\phi \cos\psi + \sin\phi \sin\psi) \\ & + v \sin\theta \cos\phi, \end{aligned}$$

$$z = t \sin\theta \sin\psi + u \sin\theta \cos\psi + v \cos\theta,$$

et

$$\begin{aligned} t = {} & x(\cos\theta \sin\phi \sin\psi + \cos\phi \cos\psi) \\ & + y(\sin\phi \cos\psi - \cos\theta \cos\phi \sin\psi) \\ & + z \sin\theta \sin\psi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u = {} & x(\cos\theta \sin\phi \cos\psi - \cos\phi \sin\psi) \\ & - y(\cos\theta \cos\phi \cos\psi + \sin\phi \sin\psi) \\ & + z \sin\theta \cos\psi, \end{aligned}$$

$$v = -x \sin\theta \sin\phi + y \sin\theta \cos\phi + z \cos\theta.$$

Ce sont ces formules que M. Lagrange a données dans sa *Méconique analytique*, pag. 369, et que M. Laplace a

publiées aussi dans sa *Mécanique céleste*, tom. 1, p. 59. Nous observerons cependant qu'afin de faire coïncider les résultats précédens avec ceux que M. Laplace a obtenus par la méthode des transformations successives, il faudrait ici changer $\psi$ en $\phi$, faire sin $\theta$ négatif, et prendre la valeur de $y$ en moins. Ces changemens de signes résultent seulement de la disposition des axes. Si dans nos formules on faisait $\psi = 0$, et $\nu = 0$, on retomberait sur celles ($6''$) du n°. 117; cela est de toute évidence.

119. Lorsqu'une droite $R$ passe par l'origine des axes, et que $xyz$ sont les coordonnées d'un de ses points, on a

$$x = R\cos X, \quad y = R\cos Y, \quad z = R\cos Z;$$

or des trois angles $X$, $Y$, $Z$, deux seulement sont indépendans, puisque l'on a la relation . . . . . $\cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1$.

Dans ces dernières formules, la droite $R$ se nomme le *rayon vecteur* de ce point, et l'origine $A$ est le *pôle* d'où partent les rayons vecteurs des divers points de l'espace.

Lorsqu'on projette le rayon vecteur sur l'un des plans coordonnés, sur le plan des $xy$, par exemple, la position de ce rayon est donnée par l'angle qu'il fait avec sa projection et par l'angle que sa projection fait avec l'axe des $x$. Soit en effet $\theta$ le premier angle $MAM'$ [Fig. 88.], et $\varphi$ le second $PAM'$, et faisons de plus $AM = R$, $AM' = r$; on aura

$$r = R\cos\theta;$$

mais

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = R\sin\theta,$$

puisque $AP$, $PM$, $MM'$ sont les coordonnées rectangu-

laires du point $M$; donc

$$x = R\cos\theta\cos\varphi, \quad y = R\cos\theta\sin\varphi, \quad z = R\sin\theta,$$

On tire de là, pour les valeurs des tangentes trigonométriques que les projections verticales du rayon vecteur $R$ font avec l'axe des $z$,

$$\frac{x}{z} = \frac{\cos\theta\cos\varphi}{\sin\theta}, \qquad \frac{y}{z} = \frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\theta}.$$

Si les axes des coordonnées étaient obliques entre eux, il est visible que les valeurs de $r$, $x$, $y$, $z$ auraient généralement la forme

$$r = Rp, \quad x = rm, \quad y = rn, \quad z = Rq;$$

$p$, $m$, $n$, $q$, représentant alors des rapports de sinus d'angles; et de là, on tirerait comme ci-dessus,

$$x = Rpm, \quad y = Rpn, \quad \frac{x}{z} = \frac{pm}{q}, \quad \frac{y}{z} = \frac{pn}{q}.$$

De sorte que si une droite, passant par un point donné $x'$, $y'$, $z'$, était rapportée à ces mêmes axes obliques, ses équations qui seraient

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z');$$

se changeraient en celles-ci,

$$x - x' = \frac{pm}{q}(z - z'), \quad y - y' = \frac{pn}{q}(z - z').$$

Cette remarque trouvera son application par la suite.

---

# CHAPITRE IV.

## *Discussion abrégée des Surfaces du second ordre.*

120. DONNONS maintenant une idée de l'usage de transformations précédentes, pour ramener à une forme plus simple l'équation générale des surfaces du second ordre,

$$\left.\begin{matrix} Az^2 + By^2 + Cx^2 + Dzy + Exz + Fyx \\ + Gz + Hy + Kx + L. \end{matrix}\right\} = 0. \quad (a)$$

Si nous faisons $x = x' + a$, $y = y' + b$, $z = z' + c$, $abc$ étant les coordonnées de la nouvelle origine, nous obtiendrons une équation de même forme que la précédente, c'est-à-dire,

$$\left.\begin{matrix} Az'^2 + By'^2 + Cx'^2 + Dz'y' + Ex'z' + Fy'x' \\ + G'z' + H'y' + K'x' + L' \end{matrix}\right\} = 0; \quad (b)$$

et posant

$$G' = 0, \quad H' = 0, \quad K' = 0, \quad (c)$$

les termes affectés des premières puissances des variables disparaîtront. Ces dernières équations étant linéaires en $abc$, comme le prouve le résultat de la substitution indiquée, on en déduit nécessairement des valeurs réelles pour ces quantités; ainsi l'équation $(b)$ se réduit à

$$\left.\begin{aligned} Az'^2 + By'^2 + Cx'^2 + Dz'y' + Ex'z' \\ + Fy'x' + L' \end{aligned}\right\} = 0 ; \quad (d)$$

celle-ci restant la même, en y supposant les coordonnées $x'$, $y'$, $z'$ négatives, il est aisé de conclure que toute droite, menée par l'origine et interceptée par la surface, sera divisée en deux parties égales à cette origine : ce point sera donc le centre de la surface.

Il pourrait arriver cependant que certaines valeurs particulières des coefficiens qui entrent dans les équations $(c)$, rendissent infinies les valeurs de $a$, $b$, $c$ ; dans ce cas, le centre de la surface courbe serait infiniment éloigné de l'origine des coordonnées, comme l'est celui de la parabole, parmi les courbes du second ordre.

Pour donner maintenant, dans l'équation $(d)$, une nouvelle direction aux axes des $x'$, $y'$, $z'$, en les laissant toujours perpendiculaires entre eux, on y fera (n°. 116)

$$\begin{aligned} x' &= mx'' + m'y'' + m''z'', \\ y' &= nx'' + n'y'' + n''z'', \\ z' &= px'' + p'y'' + p''z'', \end{aligned}$$

et l'on joindra à ces valeurs les relations

$$\left.\begin{aligned} mm' + nn' + pp' &= 0 \\ mm'' + nn'' + pp'' &= 0 \\ m'm'' + n'n'' + p'p'' &= 0 \end{aligned}\right\} (1) \qquad \left.\begin{aligned} m^2 + n^2 + p^2 &= 1 \\ m'^2 + n'^2 + p'^2 &= 1 \\ m''^2 + n''^2 + p''^2 &= 1 \end{aligned}\right\} (2)$$

alors on parviendra à une équation de la forme

$$Mz''^2 + Ny''^2 + Px''^2 + Qz''y'' + Rx''z'' + Sy''x'' + T = 0 ;$$

et afin de ne conserver que les secondes puissances des

variables, on posera

$$Q = 0, \qquad R = 0, \qquad S = 0;$$

formant réellement le développement de ces derniers coefficiens, on aura

$$\left.\begin{aligned}
&2\,App' + D(pn' + np') \\
&+2\,Bnn' + E(pm' + mp') \\
&+2\,Cmm' + F(nm' + mn') = 0 \\
&2\,App'' + D(pn'' + np'') \\
&+2\,Bnn'' + E(pm'' + mp'') \\
&+2\,Cmm'' + F(nm'' + mn'') = 0 \\
&2\,Ap'p'' + D(p'n'' + n'p'') \\
&+2\,Bn'n'' + E(p'm'' + m'p'') \\
&+2\,Cm'm'' + F(n'm'' + m'n'') = 0
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

En combinant les équations (1), (2), (3), on déterminerait les neuf constantes d'où dépend la position des nouveaux axes $x''y''z''$; mais, sans effectuer entièrement ce calcul, on peut s'assurer de la possibilité de la transformation actuelle, qui réduit l'équation en $M$, $N$, $P$, etc., à la suivante :

$$(e) \qquad Mz''^2 + Ny''^2 + Px''^2 + T = 0.$$

Voici le précis de la méthode que M. Biot emploie pour cet effet. Multiplions la première des relations (3) par $n''$, la seconde par $n'$, et retranchons ces deux produits l'un de l'autre; il viendra

$$\mu(n'p'' - p'n'') + \nu(n'm'' - m'n'') = 0, \quad (4)$$

en faisant pour abréger,

$$2Ap + Dn + Em = \mu,$$
$$2Cn + Ep + Fm = \nu.$$

Effectuons la même opération en multipliant par $m''$ et $m'$, et faisons

$$2Bn + Dp + Fm = \xi,$$

il viendra

$$\mu(m'p'' - p'm'') + \xi(m'n'' - n'm'') = 0. \quad (5)$$

Un procédé absolument semblable étant appliqué aux deux premières relations (1), on obtiendra ces deux-ci :

$$\left.\begin{aligned} m(n'm'' - m'n'') + p(n'p'' - p'n'') &= 0 \\ n(m'n'' - n'm'') + p(m'p'' - p'm'') &= 0 \end{aligned}\right\} (6)$$

Si on écrit, pour plus de simplicité, les équations (4), (5), (6), ainsi qu'il suit :

$$\mu U + \nu V = 0, \qquad \mu W - \xi V = 0;$$
$$mV + pU = 0, \qquad nV - pW = 0;$$

et que l'on élimine entre elles les quantités $U$, $V$, $W$, on obtiendra

$$\mu n - \xi p = 0, \qquad \mu m - \nu p = 0;$$

d'où dérive

$$\nu n - \xi m = 0;$$

ou en mettant pour $\mu$, $\nu$, $\xi$, leurs valeurs, et développant,

$$\left.\begin{aligned} 2(A-B)np + D(n^2 - p^2) + Enm - Fmp &= 0 \\ 2(A-C)mp + E(m^2 - p^2) + Dmn - Fnp &= 0 \\ 2(C-B)nm + F(n^2 - m^2) + Epn - Dmp &= 0 \end{aligned}\right\} (7)$$

à quoi il faudra joindre

$$m^2 + n^2 + p^2 = 1.$$

Telles sont les relations les plus simples que l'on puisse obtenir entre les trois quantités $m$, $n$, $p$ : or, à cause de la symétrie des équations (1), (2) et (3), on est en droit de conclure qu'elles fourniraient des relations absolument semblables entre les autres quantités $m'n'p'$, et $m''n''p''$. Si donc $mnp$ sont réelles, ces dernières quantités le seront aussi.

Pour résoudre les équations (7), qui sont homogènes, soit

$$m = \alpha p, \qquad n = \beta p;$$

alors la relation précédente, $m^2 + n^2 + p^2 = 1$, donnera

$$p = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}},$$

et les coefficiens $\alpha$, $\beta$ seront donnés par les équations

$$2(A - B)\beta + D(\beta^2 - 1) + E\alpha\beta - F\alpha = 0,$$
$$2(A - C)\alpha + E(\alpha^2 - 1) + D\alpha\beta - F\beta = 0.$$

Il suit de là qu'en prenant la valeur de $\alpha$ dans la première équation, pour la substituer dans la seconde, on aura, pour déterminer $\beta$, une équation du troisième degré ; et comme cette dernière a au moins une racine réelle, les valeurs des quantités $m$, $n$, $p$ satisferont aux équations (7).

121. L'équation (*e*) étant résolue par rapport à l'une quelconque des variables, donne deux valeurs égales et de signes contraires ; ainsi la surface courbe qui résulte de cette équation est divisée en deux parties égales par

chacun des plans coordonnés, et l'origine des axes $x''y''z''$, qui a pour coordonnées $abc$, est le centre de cette surface : cependant si on trouvait pour $abc$ des valeurs infinies (n°. 120), la surface serait évidemment dépourvue de centre, et l'équation $(a)$ ne pourrait plus être ramenée à la forme que présente $(e)$ ; mais voici le moyen d'obvier à cet inconvénient.

Pouvant d'abord faire disparaître, de l'équation générale $(a)$, les rectangles des coordonnées, on tombera sur un résultat de la forme

$$(f) \qquad Az^2 + By^2 + Cx^2 + Gz + Hy + Kx + L = 0 ;$$

et faisant ensuite

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c,$$

on disposera des constantes arbitraires $abc$, soit pour chasser le terme tout connu, et n'avoir par conséquent que

$$Az'^2 + By'^2 + Cx'^2 + G'z' + H'y' + K'x' = 0,$$

soit pour faire disparaître trois termes, afin de parvenir à l'équation

$$(g) \qquad Az'^2 + By'^2 + Cx'^2 + K'x' = 0 ;$$

laquelle, quoique plus simple que $(f)$, comprend néanmoins, comme cette dernière, toute les surfaces du second degré.

122. Nous pouvons à présent discuter aisément ces surfaces, mais nous nous bornerons à en rappeler les propriétés les plus remarquables. Occupons-nous d'abord des surfaces qui sont comprises dans la formule

$$(e) \qquad Mz^2 + Ny^2 + Px^2 + T = 0.$$

On a déja vu (n°. 186. *L. C.*) que les sections faites dans une surface sont très-propres à en faire concevoir la nature, et qu'il convient, pour plus de simplicité, de les prendre parallèles aux plans coordonnés ; nous nommerons par cette raison, *sections parallèles*, celles qui ont lieu dans cette hypothèse ; quant aux traces de la surface sur les plans coordonnés, on les nomme *sections principales*. On désigne aussi sous le nom d'*axes principaux*, ceux des $x\,y\,z$, lorsqu'ils sont rectangulaires.

Cela posé, supposons que $MNP$ soient positifs ; et pour obtenir les sections principales de la surface, faisons successivement $x=0$, $y=0$, $z=0$ ; on aura

$$\left.\begin{aligned} Mz^2+Ny^2+T&=0,\\ Mz^2+Px^2+T&=0,\\ Ny^2+Px^2+T&=0, \end{aligned}\right\} \quad (h)$$

équations qui ne donnent des ellipses réelles que lorsque $T$ est négatif, et qui représentent celles d'un point placé à l'origine même des axes, lorsque $T$ est nul.

Si nous imaginons en outre trois plans coupans respectivement parallèles aux plans coordonnés, leurs équations seront (n°. 101)

$$x=\alpha', \qquad y=\beta', \qquad z=\gamma',$$

et par conséquent, celles des communes sections de ces nouveaux plans avec les surfaces du second ordre douées d'un centre, auront la forme

$$\left.\begin{aligned} Mz^2+Ny^2&=U,\\ Mz^2+Px^2&=U',\\ Ny^2+Px^2&=U'', \end{aligned}\right\} \quad (k)$$

Ces équations appartiennent évidemment à des ellipses qui ont leurs centres sur les axes des $x\,y\,z$; mais comme $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ sont des constantes arbitraires, on conçoit que $U$, $U'$, $U''$, qui sont des fonctions de ces constantes, peuvent devenir nuls, positifs ou négatifs. Dans le premier cas, les sections parallèles se réduisent chacune à un point; dans le second cas elles sont réelles; et dans le troisième elles sont imaginaires: ainsi la surface que nous considérons, et à laquelle on a donné le nom d'*ellipsoïde*, est limitée dans tous les sens, et est douée de six sommets réels.

Pour s'assurer *à priori* qne cette surface enveloppe l'espace de toutes parts, menons un rayon vecteur quelconque par l'origine des coordonnées, et à cet effet faisons, n°. 119,

$$x = mR, \qquad y = nR, \qquad z = pR;$$

à l'aide de ces valeurs l'équation (*) deviendra

$$Mp^2R^2 + Nn^2R^2 + Pm^2R^2 + T = 0,$$

et donnera

$$R = \frac{\sqrt{-T}}{\sqrt{Mp^2 + Nn^2 + Pm^2}};$$

quantité qui est toujours réelle, puisque $T$ doit être négatif, et qui ne peut jamais devenir infinie, quelle que soit la position du rayon vecteur $R$.

Si deux des coefficiens $M$, $N$, $P$ étaient égaux, que l'on eût, par exemple, $N = P$, la troisième équation ($k$) deviendrait $y^2 + x^2 = \frac{U}{N}$; c'est-à-dire que toutes les

sections parallèles au plan des $xy$ seraient des cercles ; et comme les deux premières équations ($h$) deviendraient identiques, il s'ensuit que la surface proposée serait un *ellipsoïde de révolution* autour de l'axe des $z$.

Lorsque $M = N = P$, l'équation ($e$) représente évidemment celle d'une sphère dont le centre est à l'origine et dont le rayon $= \sqrt{\frac{-T}{M}}$ ne peut être réel que dans le cas où $T$ est négatif.

Enfin si on avait $M = 0$, l'équation

$$Ny^2 + Px^2 + T = 0,$$

serait celle d'un cylindre dont l'axe coïnciderait avec celui des $z$.

L'équation ($e$), dans laquelle on supposerait $T = -T'$, deviendrait

$$Mz^2 + Ny^2 + Px^2 - T' = 0 ;$$

et il est remarquable que si on fait dans celle-ci, $\frac{M}{T'} = \frac{1}{c^2}$, $\frac{N}{T'} = \frac{1}{b^2}$, $\frac{P}{T'} = \frac{1}{a^2}$, on a

$$a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 + b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2 ;$$

équation symétrique à l'égard des demi-axes principaux $a$, $b$, $c$, et qui est, par rapport aux surfaces courbes du second ordre, ce qu'est l'équation (n°. 42) par rapport aux lignes du même ordre. Dans le cas où $M = N$, ou ce qui est de même, lorsque $b = c$, on a seulement

$$a^2z^2 + a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Telle est l'équation de l'ellipsoïde de révolution : ses

axes sont $2a$ et $2b$, et son axe de rotation est celui des $x$, ainsi qu'il est facile de s'en assurer.

123. Examinons maintenant la nature de la surface contenue dans l'équation $(e)$, lorsque quelques-uns des coefficiens sont négatifs; posons par exemple

$$(e') \qquad Mz^2 - Ny^2 - Px^2 + T = 0;$$

les *traces* de cette surface, ou ses sections principales auront pour équations

$$\left.\begin{aligned} Mz^2 - Ny^2 + T &= 0, \\ Mz^2 - Px^2 + T &= 0, \\ Ny^2 + Px^2 - T &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (h')$$

la dernière appartient à l'ellipse, et les deux autres sont à l'hyperbole. Quant aux sections parallèles, elles seront données, comme ci-dessus, par des équations de la forme

$$\left.\begin{aligned} Mz^2 - Ny^2 &= U, \\ Mz^2 - Px^2 &= U', \\ Ny^2 + Px^2 &= U'', \end{aligned}\right\} \quad (k')$$

et donneront naissance à des courbes de même espèce que les équations $(h')$. Il peut arriver, dans ces équations, que $T$ soit positif ou négatif, ce qui fait deux cas faciles à discuter; mais dans l'un comme dans l'autre, ces surfaces indéfinies dans tous les sens sont des *hyperboloïdes* qui ont une ou deux *nappes*, par conséquent, quatre ou deux sommets réels; et il résulte, de ce qui précède, qu'elles deviennent de révolution, lorsque $N=P$.

Si l'équation $(e')$ était réduite à

$$Mz^2 - Ny^2 + T = 0,$$

ce qui a nécessairement lieu lorsque $P = 0$, on retomberait sur l'équation d'un cylindre perpendiculaire au plan des $xy$, et dont la base serait une hyperbole.

Enfin si on avait

$$Mz^2 - Ny^2 - Px^2 = 0,$$

auquel cas $T = 0$, la troisième des équations $(h')$ appartiendrait à un point qui serait l'origine même des coordonnées ; et les deux premières, qui sont en général à l'hyperbole, ne donneraient plus que des lignes droites ; d'où il est aisé de conclure que, dans l'hypothèse actuelle, l'on a une surface conique dont le sommet est à l'origine des axes, et qui est asymptote à l'hyperboloïde à une nappe. On tirerait la même conséquence par rapport à l'hyperboloïde à deux nappes.

124. Pour terminer la discussion des surfaces courbes du second ordre, reprenons leur équation générale

$$(g') \qquad Az^2 + By^2 + Cx^2 + Kx = 0,$$

qui, comme il serait facile de le démontrer, renferme aussi l'ellipsoïde et l'hyperboloïde ; mais afin d'en compléter l'analyse, supposons que $C$ soit nul ; on aura simplement alors

$$Az^2 + By^2 + Kx = 0;$$

et les équations des sections principales seront

$$Az^2 + By^2 = 0,$$
$$Az^2 + Kx = 0,$$
$$By^2 + Kx = 0.$$

La première ne donne qu'un point ; mais la seconde et la troisième produisent la parabole, si $x$ ou $K$ est négatif ; et comme les sections parallèles ont pour équations

$$Az^2 + By^2 = U,$$
$$Az^2 + Kx = U',$$
$$By^2 + Kx = U'',$$

la surface que l'on considère, et qui est dépourvue de centre, prend le nom de *paraboloïde elliptique*. L'hypothèse $A = B$ la rend de révolution.

Lorsque $A$ et $B$ sont de signes différens, l'une des sections principales est le système de deux droites, et les sections parallèles correspondantes sont des hyperboles. Quant aux deux autres sections principales elles restent de nature parabolique, et c'est pour cette raison que la surface proposée se nomme *paraboloïde hyperbolique*. Elle n'a pas non plus de centre, mais elle est douée de deux plans asymptotes, passant par les droites dont il s'agit et par l'axe des $x$.

Enfin le cylindre à base parabolique répond au cas où l'un des coefficiens $A$, $B$ est nul.

En discutant de la même manière l'équation

$$Az^2 + Hy + Kx = 0,$$

on s'assurera qu'elle donne lieu aussi au cylindre parabolique ; car d'une part les traces ou sections princi-

pales de la surface sont

$$Az^2 + Hy = 0,$$
$$Az^2 + Kx = 0,$$
$$Hy + Kx = 0;$$

et de l'autre part, les sections respectivement parallèles à ces traces sont

$$Az^2 + Hy = U,$$
$$Az^2 + Kx = U',$$
$$Hy + Kx = U'',$$

$U$, $U'$, $U''$ variant d'une section à l'autre. Or, on voit, par ces deux groupes d'équations, que toutes les coupes parallèles aux plans des $xz$ et $yz$ sont des paraboles égales, tandis que celles qui correspondent au plan des $xy$ sont des lignes droites parallèles entre elles. On reconnaît donc par là le caractère distinctif des surfaces cylindriques.

Il est bon de remarquer que toutes les sections parallèles faites dans une surface du second degré sont semblables, et que si une telle surface est rapportée à des coordonnées obliques, son équation sera de même forme que par rapport à ses axes rectangles.

Ce que nous venons de dire touchant les surfaces du second degré n'est qu'un fragment d'une théorie complète exposée avec beaucoup de détails dans les ouvrages cités au commencement du n°. 101, mais cela suffit dans ce Recueil.

# CHAPITRE V.

## *De la recherche de l'équation d'une surface du second ordre, d'après la loi connue de sa description.*

125. On a vu, dans le chapitre précédent, comment, par la discussion, d'une équation du second degré entre trois variables, on découvre la surface individuelle qu'elle représente : nous allons passer maintenant à la solution du problême inverse, en suivant la méthode même de M. Monge; c'est-à-dire que nous allons déterminer, d'après la loi connue de la description d'une surface, la relation qui existe entre les coordonnées de ses points.

### *Solution relative aux surfaces cylindriques.*

Toute droite qui, en parcourant une courbe quelconque, se meut parallèlement à elle-même, engendre une surface cylindrique : or, cette droite a pour équations

$$x = az + \alpha,$$
$$y = bz + \beta,$$

et quelle que soit sa position à l'égard des plans coordonnés, les coefficiens $a$, $b$ seront invariables (n°. 104),

*

mais les quantités $\alpha$, $\beta$, qui sont constantes pour une même position de la génératrice, varient lorsque cette ligne passe d'une position à une autre. Ces quantités, qui sont constantes ou variables ensemble, sont donc fonction l'une de l'autre, c'est-à-dire que

$$\beta = f(\alpha),$$

le signe $f$ étant celui d'une fonction quelconque; mais les équations précédentes donnent

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x - az, \\ \beta &= y - bz, \end{aligned}\right\} \quad \text{donc} \quad \left.\begin{aligned} \alpha &= x - az, \\ f(\alpha) &= y - bz; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

donc l'équation générale des surfaces cylindriques est

$$y - bz = f(x - az).$$

Lorsque l'on connaîtra analytiquement la nature de la courbe qui dirige le mouvement de la droite génératrice, la forme de la fonction $f$ sera déterminée; car, si $F(x, y, z) = 0$, et $F_1(x, y, z) = 0$ sont les équations de cette courbe (*), et que l'on y joigne les équations (1), on aura ces quatre

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, & F_1(x, y, z) &= 0, \\ x - az &= \alpha, & y - bz &= f(\alpha), \end{aligned}$$

(*) Si trois élémens consécutifs d'une courbe ne sont jamais dans un même plan, cette courbe est dite à *double courbure*; quelle que soit son espèce, elle peut toujours être considérée comme l'intersection de deux surfaces; c'est pour cette raison que l'on exprime la position d'une courbe au moyen de deux équations à trois variables et qui ont lieu simultanément.

lesquelles auront nécessairement lieu en même tems pour tous les points où la génératrice touchera la courbe donnée, ou, ce qui revient au même, quelle que soit la valeur de $\alpha$. Ainsi en éliminant $x$, $y$, $z$, entre ces quatre équations, et remettant dans le résultat pour $\alpha$ et $f(\alpha)$ leurs valeurs, on aura l'équation de la surface cylindrique individuelle cherchée.

Supposons, pour exemple, que la droite génératrice parcoure la courbe d'intersection de deux sphères dont les équations aux coordonnées rectangles sont

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 + (z-\gamma)^2 &= r'^2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

la première sphère ayant son centre à l'origine, et la seconde l'ayant sur l'axe des $z$, à une distance $\gamma$ de cette origine. Reprenant les équations de la génératrice censée donnée de direction, on aura

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x - az \\ \beta &= y - bz \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

si on soustrait les équations (1), l'une de l'autre, on obtiendra après le développement,

$$z = \frac{r^2 - r'^2 + \gamma^2}{2\gamma}.$$

Faisant, pour simplifier, le second membre $= m$, on aura $z = m$, et substituant cette valeur dans la première équation (1), il viendra

$$x^2 + y^2 = r^2 - m^2.$$

Dans la même hypothèse les équations (2) se changeront en

$$x = \alpha + am,$$
$$y = \beta + bm;$$

ajoutant ensemble celles-ci, après les avoir élevées au carré, on aura, en vertu de la précédente,

$$(\alpha + am)^2 + (\beta + bm)^2 = r^2 - m^2.$$

Enfin éliminant $\alpha$ et $\beta$ au moyen de leurs valeurs (2), et développant, on trouvera pour équation de la surface cylindrique individuelle cherchée,

$$x^2+y^2+(a^2+b^2)z^2-2axz-2byz+2amx+2bmy \\ -2m(a^2+b^2)z=r^2-m^2-(a^2+b^2)m^2.$$

Si, dans cette équation, l'on fait $z = m$, la résultante

$$x^2 + y^2 = r^2 - m^2,$$

sera, sur le plan des $xy$, l'équation de la projection de l'intersection de la surface cylindrique et d'un plan mené perpendiculairement à l'axe des $z$, à une distance $m$ de l'origine.

En faisant $z = 0$ on obtient la section principale faite par le plan des $xy$. Cette section a pour équation

$$x^2 + y^2 + 2amx + 2bmy = r^2 - m^2 - (a^2 + b^2)m^2;$$

mais en transportant l'origine au centre, pour faire disparaître les premières puissances de $x$ et de $y$, on a

$$x'^2 + y'^2 = r^2 - m^2,$$

comme ci-dessus.

Enfin lorsque la droite génératrice est parallèle à la

ligne des $z$, on a $a = b = 0$, et l'on retombe encore sur l'équation précédente, comme cela doit être.

*Solution relative aux surfaces coniques.*

126. Si une droite passe constamment par le même point et glisse le long d'une courbe quelconque, elle engendrera une surface conique. Cela posé soient $abc$ les coordonnées fixes du sommet ; les équations de la génératrice seront

$$x - a = \alpha (z - c),$$
$$y - b = \beta (z - c),$$

d'où l'on tire

$$\alpha = \frac{x-a}{z-c}, \qquad \beta = \frac{y-b}{z-c}.$$

Pour une même position de cette droite les coefficiens $\alpha\ \beta$ sont constans ; mais ils varient lorsque la génératrice passe d'une position à une autre : ces coefficiens sont donc fonction l'un de l'autre : ainsi on a

$$\beta = f(\alpha),$$

$f$ indiquant une fonction quelconque : par conséquent l'équation générale des surfaces coniques est

$$\frac{y-b}{z-c} = \frac{f(x-a)}{z-c}.$$

Il résulte de là, et du numéro précédent, que si $F(x,y,z)$, $F_1(x, y, z)$ sont les équations de la courbe à double courbure qui dirige le mouvement de la génératrice, ces

quatre équations

$$F(x,y,z)=0, \quad F_1(x,y,z)=0,$$

$$\frac{x-a}{z-c}=\alpha, \qquad \frac{y-b}{z-c}=f(\alpha),$$

auront lieu en même tems pour tous les points communs à la génératrice et à la courbe; c'est-à-dire quelle que soit la valeur de $\alpha$. On parviendra donc, par l'élimination, à une équation unique qui sera celle de la surface conique individuelle demandée. Cherchons d'après ces principes l'équation du cône oblique à base circulaire.

Soient $a\ b\ c$ les coordonnées du sommet du cône, dont la base horisontale est un cercle, et supposons que l'origine des axes soit au centre de ce cercle. Les deux projections de la droite génératrice sont en général, par ce qui précède,

$$\alpha=\frac{x-a}{z-c}, \qquad \beta=\frac{y-b}{z-c}. \qquad (A)$$

Quant à la courbe individuelle qui dirige le mouvement de cette génératrice, elle peut être considérée comme l'intersection d'une sphère et d'un plan: or, dans cette circonstance, la sphère et le plan, qui est celui des $xy$, ont pour équations respectives

$$x^2+y^2+z^2=r^2, \quad z=0. \qquad (B)$$

Ces quatre équations devant avoir lieu en même tems, celles $(A)$ deviendront, à cause de $z=0$,

$$\alpha=\frac{x-a}{-c}, \qquad \beta=\frac{y-b}{-c},$$

d'où l'on tire aisément

$$x^2 = (a - \alpha c)^2, \qquad y^2 = (b - \beta c)^2.$$

Substituant ces valeurs dans la première équation $(B)$, qui se réduit à $x^2 + y^2 = r^2$, on aura

$$b^2 + \beta^2 c^2 - 2bc\beta + a^2 + \alpha^2 c^2 - 2a\alpha c = r^2;$$

et mettant ici pour $\beta$ et $\alpha$ leurs valeurs $(A)$, il viendra

$$\left.\begin{aligned} &c^2\left(\frac{y-b}{z-c}\right)^2 - 2bc\left(\frac{y-b}{z-c}\right) \\ &+c^2\left(\frac{x-a}{z-c}\right)^2 - 2ac\left(\frac{x-a}{z-c}\right) \end{aligned}\right\} = r^2 - (a^2+b^2). \quad (C)$$

Telle est l'équation cherchée de la surface conique.

Si le sommet du cône était dans le plan même des $xz$, on aurait $b = 0$, et l'équation précédente deviendrait

$$\frac{c^2y^2}{(z-c)^2} + c^2\frac{(x-a)^2}{(z-c)^2} - 2ac\frac{(x-a)}{z-c} = r^2 - a^2.$$

Si, de plus, ce sommet était dans l'axe vertical des $z$, on aurait $a = 0$, et par conséquent l'équation du cône droit à base circulaire serait

$$\frac{c^2y^2}{(z-c)^2} + \frac{c^2x^2}{(z-c)^2} = r^2.$$

Lorsque la base du cône droit est une ellipse, on a $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, pour équation de cette base; et alors l'équation précédente, dans laquelle on peut faire . . . $z - c = z'$, pour transporter l'origine des coordonnées au

sommet du cône, devient, en faisant d'ailleurs $m = \frac{a}{c}$,

$n = \frac{b}{c}$,

$$m^2y^2 + n^2x^2 = m^2n^2z'^2.$$

C'est sous cette forme très-simple que Euler, dans son *Introductio in analysin infinitorum*, a présenté l'équation du cône à base elliptique.

En plaçant de même l'origine des axes au sommet du cône oblique, l'équation (*C*) se simplifie et devient, à cause de $x' = x - a$, $y' = y - b$, $z' = z - c$,

$$(a^2+b^2-r^2)z'^2 + c^2(x'^2+y'^2) - 2acx'z' - 2bcy'z' = 0. \quad (D),$$

Nous aurons occasion, par la suite, de faire usage de ce résultat.

*Solution relative aux surfaces de révolution.*

127. Quelle que soit la nature de la courbe génératrice d'une surface de révolution, lorsqu'on coupe cette surface par un plan perpendiculaire à l'axe de révolution, l'on obtient, pour section, une circonférence de cercle dont le centre est dans l'axe, et dont tous les points sont par conséquent à égale distance d'un autre point pris sur cet axe; ainsi en représentant par

$$x = Az + a, \qquad y = Bz + b,$$

les équations de l'axe de révolution, le plan qui lui sera perpendiculaire aura pour équation, n°. 109.

$$Ax + By + z = \delta;$$

la quantité $\delta$, qui détermine la position du plan, étant constante pour le même plan perpendiculaire, et variable d'un plan à un autre.

Maintenant si on prend le point où l'axe de révolution rencontre le plan des $xy$, pour le centre commun d'une suite de sphères concentriques; ce centre aura visiblement, pour coordonnées, $x=a$, $y=b$, $z=0$, et l'équation générale des surfaces sphériques, dont le rayon indéterminé $=\gamma$, sera

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=\gamma^2.$$

Or, les courbes faites sur la surface de révolution, par des plans perpendiculaires à l'axe de rotation, peuvent être censées les mêmes que celles qui seraient produites par les surfaces sphériques dont il s'agit; les quantités $\delta$, $\gamma$ sont donc constantes pour tous les points de la même courbe d'intersection, mais elles varient lorsqu'on passe d'une intersection à l'autre; ainsi les valeurs de $\delta$ et de $\gamma^2$ sont fonction l'une de l'autre, et l'équation générale des surfaces de révolution est

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=f(Ax+By+z);$$

$f$ indiquant une fonction quelconque dont la forme dépend de la nature de la courbe génératrice.

$a$ et $b$ sont nuls, lorsque l'axe de rotation passe par l'origine; alors l'équation précédente devient

$$x^2+y^2+z^2=f(Ax+By+z),$$

et l'on a de plus $A=0$, $B=0$, lorsque cet axe coïncide avec la ligne des $z$. Dans ce cas, l'équation des

surfaces de révolution se réduit à

$$x^2 + y^2 + z^2 = f(z),$$

ou à

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

les signes $f$ et $\varphi$ désignant des fonctions quelconques.

Pour déterminer, dans l'équation générale des surfaces de révolution, la forme de la fonction arbitraire, il faut connaître les équations de la courbe qui engendre la surface que l'on considère : les équations

$$F(x, y, z) = 0, \qquad F_1(x, y, z) = 0,$$
$$Ax + By + z = \delta, \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = f(\delta),$$

seront donc celles qu'il faudra combiner entre elles, pour obtenir l'équation de la surface individuelle cherchée.

Proposons-nous, pour exemple, de trouver l'équation du sphéroïde engendré par la révolution d'une ellipse autour de son petit axe $2b$. La courbe génératrice étant plane, ses équations seront

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$
$$z = 0;$$

on aura, en outre, par ce qui précède,

$$y = \delta,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = \gamma^2,$$

$y = \delta$ étant l'équation d'un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, et la dernière, celle d'une sphère dont le centre est à l'origine des coordonnées.

Ces quatre équations doivent avoir lieu simultanément

pour que la surface proposée soit de révolution ; si donc on élimine entre elles, $x, y, z$, on aura

$$a^2b^2 - a^2\delta^2 + b^2\delta^2 = b^2\gamma^2 ;$$

et si on substitue ici pour $\delta$ et $\gamma^2$ leurs valeurs, la surface du sphéroïde de révolution sera donnée par l'équation

$$b^2z^2 + a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 ;$$

résultat qui, en y changeant $a$ en $b$ et $x$ en $y$, rentre dans celui du n°. 122.

On nomme *aplatissement* d'une ellipsoïde de révolution, la différence $\alpha$ des demi-axes, l'un d'eux étant pris pour unité. Si donc, dans l'équation précédente, on introduit cet aplatissement, en posant $b = a(1-\alpha)$, il viendra

$$(1-\alpha)^2z^2 + (1-\alpha)^2x^2 + y^2 = a^2(1-\alpha)^2,$$

ou en développant, négligeant les termes en $\alpha^2$, et faisant $a = 1$, pour simplifier,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 - 2\alpha(x^2 + z^2 - 1) = 0 ;$$

ou en général

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 - 2\alpha u' = u = 0 ;$$

$\alpha$ étant supposé un très-petit coefficient, et $u'$ étant une fonction de $x, y, z$. C'est sous cette forme que l'auteur de la *Mécanique céleste* considère l'équation de la surface de la terre. On trouvera, dans mes *Traités de Géodésie et de Topographie*, diverses applications importantes de cette équation.

*Solution relative à la surface engendrée par une droite mobile qui s'appuie sur trois autres droites fixes.*

128. *Première solution.* Quoique l'on puisse, en général, placer comme on voudra les axes des coordonnées par rapport aux trois droites fixes qui dirigent le mouvement de la génératrice, on conçoit que pour abréger les calculs, les directions de ces axes doivent être telles que les équations des droites soient les plus simples possibles; or, c'est ce qui arrivera en prenant pour axe des $x$ la première droite fixe, pour axe des $y$ la perpendiculaire à cette première et à la seconde droite, et pour axe des $z$ la perpendiculaire au plan $xy$.

Cela posé, les équations de la deuxième droite fixe sont

$$x = az, \qquad y = b;$$

celles de la troisième droite,

$$x = mz + n, \quad y = pz + q;$$

et les équations de la droite mobile, qui est assujétie à passer constamment par l'axe des $x$, sont de la forme

$$x = Az + B, \qquad y = Cz,$$

$A$ et $B$ étant des fonctions de $C$ qu'il s'agit de déterminer. Si ces quantités étaient connues, en éliminant $C$ entre ces deux dernières équations, l'on aurait celle de la surface engendrée par la droite mobile : or, cette ligne devant s'appuyer sur les deuxième et troisième droites, il en résulte (n°. 106) les équations de condition suivantes :

Digitized by Google

$$BC + b(A - a) = 0,$$
$$(B - n)(C - p) + q(A - m) = 0,$$

desquelles on tire

$$A = \frac{nC^2 + (qm - np - ab)C + abp}{bp + (q - b)C},$$
$$B = \frac{b(aq - mq + np) - bnC}{bp + (q - b)C}.$$

Substituant ces valeurs dans les équations de la droite mobile; ensuite éliminant $C$, et ordonnant, il viendra cette équation du second degré en $x$, $y$, $z$,

$$abpz^2 + ny^2 - (ab + np)yz - bpxz + (b - q)xy - bny + (baq - bmq + bnp)x = 0. \quad (1)$$

La *surface gauche* engendrée par le mouvement de cette droite est donc du second ordre.

Voici un des moyens de se convaincre que cette surface peut être engendrée de deux manières différentes par une droite mobile; ce qui est le caractère distinctif de l'hyperboloïde à une nappe.

Soient

$$x = Az + B,$$
$$y = Cz + D,$$

les équations de cette génératrice : pour qu'elle soit toute entière sur la surface de l'équation (1), il faut que cette équation, après y avoir mis pour $x$ et $y$ leurs valeurs actuelles, ait lieu indépendamment de $z$. Aussi trouvera-t-on, en égalant séparément à zéro les coefficiens de $z^2$, de $z$ et le terme constant, dans le résultat de

la substitution, trois équations entre les quatre quantités $A$, $B$, $C$, $D$, lesquelles fourniront des valeurs réelles, et indiqueront qu'il existe effectivement deux manières différentes de produire la surface dont il s'agit. L'analyse de cette propriété est si simple qu'il est inutile de la développer.

*Deuxième solution.* L'équation (1) n'est pas symétrique, parce que les équations desquelles nous sommes partis ne le sont pas elles-mêmes. Il n'en serait pas ainsi, en rapportant les points de la surface cherchée à des axes parallèles aux trois droites données; mais alors le calcul devient un peu plus compliqué. En effet, soient dans l'hypothèse présente, $t$, $u$, $v$ les coordonnées d'un point quelconque de la surface. Les équations des trois droites données et rapportées à des axes obliques, seront,

pour la première, parallèle à $v$, $\quad t = f$, $\quad u = f'$;
pour la seconde, parallèle à $u$, $\quad v = g$, $\quad t = g'$;
pour la troisième, parallèle à $t$, $\quad u = h$, $\quad v = h'$;

$f$, $f'$, $g$, $g'$, $h$, $h'$ étant des quantités constantes et données.

Si, comme on en est le maître, on représente par

$$u = Mt + N, \qquad v = M't + N',$$

les équations des deux projections de la droite mobile, la troisième projection sera donnée par l'équation

$$M'u - Mv = M'N - MN';$$

et comme cette droite s'appuie constamment sur les trois droites fixes, on a nécessairement ces relations (n°. 106),

$f'=Mf+N$, $g=M'g'+N'$, $M'h-Mh'=M'N-MN'$,

qui serviront à faire connaître trois des quantités $M$, $N$, $M'$, $N'$.

D'abord on trouvera aisément

$$N=\frac{fu-f't}{f-t}, \qquad N'=\frac{g'v-gt}{g'-t},$$

ensuite

$$M=\frac{ff'-f't-fv+f't}{f^2-fu}, \quad M'=\frac{gg'-gt-g'v+gt}{g'^2-g'u},$$

et parce qu'en égalant les deux valeurs de $M'N-MN'$, on a

$$M'h-Mh'=M'u-Mv;$$

il s'ensuit que la surface engendrée par la droite mobile, est

$$\left.\begin{array}{r} tu(h'-g)+uv(g'-f)+vt(f'-h) \\ +t(gh-f'h')+u(fg-g'h')+v(fh-f'g') \\ +f'g'h'-fgh \end{array}\right\}=0.$$

C'est ainsi que ce problême se trouve résolu dans l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie*, par MM. Monge et Hachette. On y trouvera une manière différente de celle dont je viens de me servir, pour reconnaître les deux modes de génération que possède la surface donnée par la dernière équation ci-dessus.

L'hyperboloïde à une nappe, a cela de commun avec les autres surfaces du second degré, qu'elle peut être engendrée de deux manières différentes, par un cercle variable de rayon, et dont le plan reste parallèle à lui-même.

## CHAPITRE VI.

*Méthode générale pour mener des plans tangens aux surfaces courbes, et applications de cette méthode.*

129. Si on imagine un plan tangent à une surface courbe quelconque, et une suite de plans qui passent par le point de contact, de manière que ceux-ci coupent la surface et le plan tangent, les sections faites sur la surface courbe auront respectivement pour tangentes, ces droites qui sont les intersections des plans coupans et du plan tangent.

Réciproquement, si tant de droites qu'on voudra sont tangentes à une surface courbe, et ne forment qu'un seul et même contact, elles seront dans le plan tangent à cette surface; car s'il en était autrement, on pourrait par un des points d'une courbe plane mener deux tangentes à cette courbe, ce que l'on sait être impossible.

Pour obtenir l'équation du plan tangent, il ne s'agit donc que d'exprimer algébriquement qu'une droite est assujétie à passer par un point d'une surface, et à lui être tangente dans toutes ses situations possibles. La méthode que nous allons exposer étant générale, nous nous occuperons seulement de déterminer l'équation du plan tangent aux surfaces du second ordre. L'équation de ces

surfaces est, par le n°. 121,

$$Mz^2+Ny^2+Px^2+M'z+N'y+P'x+K=0; \quad (1)$$

et lorsque $x', y', z'$, sont les coordonnées d'un de leurs points, on a évidemment

$$Mz'^2+Ny'^2+Px'^2+M'z'+N'y'+P'x'+K=0. \quad (2)$$

D'un autre côté, les équations des projections d'une droite menée à volonté par ce point, sont

$$x-x'=a(z-z'), \quad y-y'=b(z-z'). \quad (3)$$

Ensuite, pour transporter l'origine des axes à ce même point, et rapporter ceux de la surface courbe à des coordonnées polaires (n°. 119), on fera dans l'équation (1)

$$x=R\cos\theta\cos\varphi+x', \; y=R\cos\theta\sin\varphi+y', \; z=R\sin\theta+z',$$

ou, pour abréger,

$$x=Rpm+x', \quad y=Rpn+y', \quad z=Rq+z';$$

on aura par ce moyen

$$\left.\begin{array}{l} M(Rq+z')^2+N(Rpn+y')^2+P(Rpm+x')^2 \\ +M'(Rq+z')+N'(Rpn+y')+P'(Rpm+x') \end{array}\right\}=0.$$

Le développement de cette équation sera visiblement de la forme

$$\mu R^2+\nu R+\xi=0, \quad \text{ou} \quad R(\mu R+\nu)+\xi=0.$$

Or, si la droite que l'on considère devient tangente à la surface, on aura $R=0$; par conséquent $\xi=0$, et c'est

précisément la relation (2), comme le confirme le résultat du développement ; on aura donc pour l'équation de condition du contact,

$$\eta = 0,$$

c'est-à-dire, en ne prenant, dans le développement dont il s'agit, que les termes qui multiplient la première puissance de $R$,

$$2Mqz' + 2Npny' + 2Ppmx' + M'q + N'pn + P'pm = 0.$$

Divisant tout par $q$, et faisant attention que, par le n°. 119, $\frac{pm}{q} = a$, $\frac{pn}{q} = b$, il viendra

$$2Mz' + 2Nby' + 2Pax' + M' + N'b + P'a = 0 \quad (4)$$

Cette équation étant la seule qui existe entre $a$ et $b$, il s'ensuit que la position de la tangente est absolument arbitraire. Nous pouvons faire disparaître ces quantités ; car les équations (3) donnant $a = \frac{x-x'}{z-z'}$, $b = \frac{y-y'}{z-z'}$, on a

$$(2Mz' + M')(z-z') + (2Ny' + N')(y-y') + (2Px' + P')(x-x') = 0.$$

puis effectuant les multiplications indiquées et réduisant à l'aide de la relation (2), on parvient à ce résultat plus simple

$$\left.\begin{array}{r}(2Mz' + M')z + (2Ny' + N')y + (2Px' + P')x \\ + M'z' + N'y' + P'x' + 2K\end{array}\right\} = 0; \quad (T)$$

lequel ne peut varier, puisqu'il se trouve dégagé des

quantités qui particularisent la tangente, pourvu cependant que cette droite, quelle que soit d'ailleurs sa direction, passe constamment par le même point de la surface courbe; de plus, puisque $xyz$ n'entrent ici qu'à la première puissance, les tangentes aux surfaces du second ordre, et qui ont un contact commun, sont toutes dans un plan qui jouit lui-même de la propriété de toucher ces surfaces: l'équation précédente est donc celle du plan tangent.

Lorsqu'on se propose de mener un plan tangent à une surface courbe du second ordre par un point extérieur donné $x''y''z''$, l'équation $(T)$, qui ne change pas de forme, devient

$$(2Mz'+M')z''+(2Ny'+N')y''+(2Px'+P')x'' + M'z'+N'y'+P'x'+2K=0,$$

$x'y'z'$ étant les coordonnées inconnues du point de contact.

En combinant cette équation avec celle de la surface, on ne peut obtenir que les valeurs de deux de ces coordonnées en fonction de la troisième, ou, ce qui est de même, on arrive aux équations des projections de la courbe de tous les points de contact possibles. Ainsi, la question actuelle est susceptible d'une infinité de solutions; et il est à-propos de remarquer qu'une droite qui passerait constamment par le point donné, et qui, dans son mouvement, ne cesserait de toucher la surface courbe, engendrerait un cône tangent à cette surface dans tous les points de contact dont il vient d'être parlé. Si le point donné était lumineux, la courbe déterminée par tous ces points, serait celle qui sépare la partie ombrée de la partie éclairée. On voit donc par là comment peut être résolu le problème général des ombres, mais nous reviendrons sur ce sujet.

130. Si un plan tangent à la sphère, dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

devait passer par le point extérieur $x''y''z''$, on aurait pour l'équation de ce plan, ou pour celle du plan de la courbe de contact,

$$xx'' + yy'' + zz'' = r^2;$$

ôtant celle-ci de la première, il restera

$$x^2 - xx'' + y^2 - yy'' + z^2 - zz'' = 0;$$

et par conséquent

$$\left(x - \frac{x''}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y''}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{z''}{2}\right)^2 = \frac{x''^2 + y''^2 + z''^2}{4}.$$

Cette équation étant celle d'une sphère dont les coordonnées du centre sont $\frac{x''}{2}$, $\frac{y''}{2}$, $\frac{z''}{2}$, et le rayon $= \sqrt{\frac{x''^2 + y''^2 + z''^2}{4}}$, il s'ensuit que, si on joint le centre de la sphère donnée et le point connu, la sphère qui sera décrite sur cette droite, comme diamètre, coupera la première suivant une circonférence de cercle, qui sera le lieu de tous les points de contact cherchés, et dont la projection, sur le plan des $xy$, aura pour équation

$$x^2 + y^2 + \frac{(r^2 - xx'' - yy'')^2}{z''^2} = r^2.$$

Lorsque $z'' = 0$, on a simplement

$$r^2 = xx'' + yy'';$$

c'est-à-dire que la courbe de contact est dans un plan perpendiculaire à celui des $xy$, ce qui est en effet évident.

La normale à une surface courbe étant la droite qui, passant par le point de contact, est perpendiculaire au plan tangent, c'est-à-dire à toutes les droites tracées dans ce plan, ses équations seront

$$x - x' = -\frac{1}{a'}(z - z'), \quad y - y' = -\frac{1}{b'}(z - z'),$$

Or, pour toute surface de révolution et du second ordre, donnée par la formule $Mz^2 + Ny^2 + Mx^2 + K = 0$, n°. 122, on a, en faisant successivement $y$ et $x = 0$ dans la relation $(T)$, n°. précédent, et en ayant égard à l'observation qui commence le n°. 109,

$$a' = -\frac{z'}{x'}, \qquad b' = -\frac{Mz'}{Ny'},$$

puisque, dans les équations (1) et $(T)$, $M' = N' = P' = 0$ et $M = P$. Partant les équations des projections de la normale deviennent

$$xz' = x'z, \quad y - y' = \frac{Ny'}{Mz'}(z - z').$$

Ainsi, en vertu de la première équation, dans laquelle on lit que la projection sur le plan des $xz$ passe par l'origine, on doit conclure que la normale rencontre l'axe des $y$, ou celui de rotation ; c'est même ce qui a lieu pour toute surface de révolution.

Résolvons maintenant la question suivante :

PROBLÈME.

131. *Mener un plan tangent à une sphère, et qui soit en même tems assujéti à être parallèle à un autre plan donné.*

Soit

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2, \qquad (1)$$

l'équation de la sphère; celle du plan tangent sera

$$x''x' + y''y' + z''z' = r^2, \qquad (2)$$

$x''y''z''$ étant les coordonnées du point par lequel passe le plan proposé, et $x'y'z'$ étant celles des points de la surface sphérique, comptées du centre. On aura en outre pour l'équation du plan donné

$$z = ax + by + c, \qquad (3)$$

Celle (2) pouvant s'écrire ainsi,

$$z'' = -\frac{x'}{z'}x'' - \frac{y'}{z'}y'' + \frac{r^2}{z'}, \qquad (4)$$

il faudra, pour que les deux plans soient parallèles, qu'on ait les relations

$$a = \frac{-x'}{z'}, \qquad b = \frac{-y'}{z'},$$

ou bien

$$x' = \frac{-x'}{a}, \qquad c' = \frac{-y'}{b},$$

et par conséquent

$$y' = \frac{bx'}{a}.$$

Comme il est permis de prendre pour axe des $x$ la ligne qui passe par le point donné, on a, à ce point, $y'' = z'' = 0$, et pour lors l'équation (2) donne

$$x' = \frac{r^2}{x''}.$$

De là, on conclut aisément que,

$$z' = \frac{-r^2}{ax''}, \qquad y' = \frac{br^2}{ax''}.$$

substituant ces valeurs dans (1), et réduisant, on a

$$r^2a^2 + b^2r^2 + r^2 = a^2x''^2,$$

d'où l'on tire

$$x'' = \frac{r\sqrt{1 + a^2 + b^2}}{a}.$$

On détermine les coordonnées du contact à l'aide de l'équation (1) ; en effet, en y substituant les valeurs ci-dessus de $y'$ et $z'$ en fonction de $x''$, on obtient

$$x' = \frac{ar}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}};$$

et par suite

$$y' = \frac{br}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \qquad z' = \frac{r}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Pour trouver l'expression de la perpendiculaire abaissée

du centre de la sphère sur le plan tangent, il faut faire attention qu'à ce point, $x'' = y'' = z'' = 0$ : or, en général, la longueur de la perpendiculaire est (n°. 109) $\frac{z'' - ay'' - by'' - c}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}$ ; et pour le cas actuel, on a simplement

$$\frac{-c}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Mais l'équation (4) donne $c = \frac{r^2}{z'}$, $z'$ étant la coordonnée verticale du point de contact ; par conséquent l'expression de la perpendiculaire devient

$$-\frac{r^2}{z'\sqrt{1 + a^2 + b^2}} ;$$

et si l'on y met pour $z'$, sa valeur $\frac{r}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}$, on aura $r$ pour résultat. Donc le rayon qui passe par le point de contact, est perpendiculaire au plan tangent : vérité démontrée dans tous les élémens de géométrie, et qui se vérifie d'une manière fort élégante par l'analyse.

## PROBLÈME.

132. *Trouver le centre d'une sphère qui en touche une autre, ainsi qu'un plan donné de position, et qui passe en même tems par un point donné.*

Pour simplifier les calculs, plaçons l'origine des axes au centre de la sphère connue, et supposons que le plan des

$xy$ soit parallèle au plan donné. Cela posé, soient $x\,y\,z$ les coordonnées du centre cherché, $a\,b\,c$ celles du point connu, $d$ la distance de ce plan donné au plan des $xy$; enfin $r$ et $u$ les rayons respectifs des sphères connue et cherchée; on aura, pour la condition du contact des deux sphères,

$$x^2+y^2+z^2=(r+u)^2;$$

pour celle du contact du plan et de la sphère cherchée,

$$z-d=u;$$

et pour exprimer que la surface de cette sphère passe par le point donné,

$$(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2=u^2.$$

Ainsi le problême est indéterminé, puisque l'on a moins d'équations que d'inconnues.

Les deux premières équations combinées entre elles pour éliminer $u$, donnent

$$x^2+y^2=r^2+d^2-2dz+2rz-2dr. \qquad (1)$$

La seconde et la troisième équation combinées de la même manière, fournissent

$$a^2+b^2+c^2+x^2+y^2-2ax-2by-2cz=d^2-2dz;$$

et si on soustrait ces deux résultats l'un de l'autre, il viendra

$$a^2+b^2+c^2-2ax-2by-2cz=-2rz+2dr-r^2. \qquad (2)$$

Les deux équations (1) et (2) peuvent se mettre sous les formes suivantes :

$$x^2 + y^2 + 2(d-r)z = r^2 + d^2 - 2dr, \qquad (1')$$
$$2ax + 2by + 2(c-r)z = a^2 + b^2 + c^2 + r^2 - 2dr. \qquad (2')$$

Si on éliminait successivement $y$ et $z$ entre celles-ci, on aurait les équations des projections verticale et horisontale de la courbe plane sur laquelle sont situés tous les centres des sphères qui résolvent la question. Il est visible, par la nature de ces dernières équations (1'), (2'), que cette courbe résulte de l'intersection d'un paraboloïde de révolution et d'un plan, et que l'axe du paraboloïde est vertical et passe par l'origine des axes.

Afin de faire encore une application de la méthode des plans tangens, nous résoudrons la question suivante, relative aux ombres.

## PROBLÈME.

133. *Trouver l'équation d'un plan tangent à deux sphères données de grandeur et de position.*

Supposons, ce qui est toujours possible, que le centre de la première sphère soit à l'origine des axes triangulaires, et que celui de la seconde sphère soit sur l'axe des $x$; on aura, pour les équations respectives de ces sphères,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2,$$
$$(x'' - a)^2 + y''^2 + z''^2 = r'^2;$$

et pour celles des plans qui leur sont respectivement tangens,

$$xx' + yy' + zz' = r^2,$$
$$(x - a)(x'' - a) + yy'' + zz'' = r'^2;$$

Digitized by Google

ou bien

$$\left.\begin{aligned} z &= -\frac{x'}{z'}x - \frac{y'}{z'}y + \frac{r^2}{z'} \\ z &= -\frac{(x''-a)}{z''}x - \frac{y''}{z''}y + \frac{r'^2 + a(x''-a)}{z''} \end{aligned}\right\} (A)$$

Ces dernières équations doivent être identiques, pour que les deux plans coïncident ; donc

$$\frac{x'}{z'} = \frac{x''-a}{z''}, \quad \frac{y'}{z'} = \frac{y''}{z''}, \quad \frac{r^2}{z'} = \frac{r'^2 + a(x''-a)}{z''};$$

ou bien, après avoir chassé les dénominateurs,

$$x'z'' = (x''-a)z', \qquad (B)$$

$$y'z'' = y''z', \qquad (C)$$

$$r^2z'' = \{r'^2 + a(x''-a)\}z' \qquad (D)$$

Si, dans cette dernière équation, l'on met pour $z'$ sa valeur tirée de celle $(B)$, on aura

$$x''-a = \frac{r'^2x'}{r^2 - ax'}. \qquad (1)$$

Pour obtenir une autre relation entre $x'$ et $x''$, on combinera d'abord entre elles les équations $(B)(C)$, afin d'en éliminer $z''$, et l'on aura $y'' = \frac{y'(x''-a)}{x'}$ ; ensuite on introduira cette valeur dans $(B)$, et l'on trouvera aisément, à cause de $z''^2 = r'^2 - (x''-a)^2 - y''^2$,

$$x''-a = \pm\frac{r'x'}{r}; \qquad (2)$$

partant

$$x' = \frac{r}{a}(r \mp r'), \qquad x'' = a - \frac{r'}{a}(r' \mp r).$$

Ainsi, les lignes de contact, déterminées par ces deux équations, sont dans des plans perpendiculaires à l'axe des $x$. Si, dans la première $(A)$ qui devient, en mettant pour $x'$ sa valeur tirée de l'équation de la première sphère,

$$z = \frac{-xx' - yy' + r^2}{\sqrt{r^2 - x'^2 - y'^2}},$$

on substitue pour $x'$ sa valeur ci-dessus, on aura

$$z = \frac{r^2 a - rx(r \mp r') - ayy'}{\sqrt{r^2 a^2 - r^2(r \mp r')^2 - a^2 y'^2}}. \qquad (E)$$

Telle est l'équation d'un plan touchant en même tems deux sphères, et dont la position dépend de $y'$. Il est possible de trouver un résultat qui convienne à la fois à tous ces plans, c'est-à-dire de parvenir à l'équation de la surface conique qui enveloppe les sphères : en voici le moyen.

Si dans $(E)$ l'on fait $y$ et $z = 0$, on aura, pour l'abscisse du point d'intersection du plan tangent et de l'axe des $x$,

$$x = \frac{ar}{r \mp r'} = m. \qquad (3)$$

Or, ce plan, dans toutes ses situations possibles, touche la première sphère suivant une circonférence de cercle, résultante de la commune section de cette sphère et d'un plan perpendiculaire aux $x$, mené à $x' = \frac{r}{a}(r \mp r')$.

de distance de l'origine des coordonnées : la question est donc réduite à chercher l'équation de la surface conique engendrée par une droite qui tourne autour d'un point donné sur l'axe des $x$, par l'abscisse (3), et qui passe constamment par tous les points de la courbe d'intersection des deux surfaces

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= r^2 \\ x &= \frac{r}{a}\,(r\mp r')\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Cela posé, les équations des projections de la génératrice étant généralement (n°. 126),

$$\frac{x-a}{z-c}=\alpha, \qquad \frac{y-b}{z-c}=\beta,$$

deviennent dans la circonstance actuelle,

$$\frac{x-m}{z}=\alpha, \qquad \frac{y}{z}=\beta. \qquad (5)$$

Combinant celles-ci avec les précédentes, on trouvera aisément

$$x^2=\frac{r^2}{a^2}\,(r\mp r')^2, \quad y^2=z^2\beta^2, \quad z^2=\frac{(x-m)^2}{\alpha^2}.$$

Si on introduit maintenant ces valeurs dans la première équation (4), et que l'on élimine $m$, on obtiendra un résultat qui, étant décomposé en facteurs, sera

$$\alpha^2\left\{\frac{(r\mp r')^2-a^2}{a^2}\right\}+\left\{\beta^2+1\right\}\left\{\frac{(r\mp r')^2-a^2}{(r\mp r')\,a}\right\}=0.$$

De plus, si on réduit tous les termes au même dénomina-

teur, et que l'on remplace $\alpha$ et $\beta$ par leurs valeurs (5), on aura, réductions faites,

$$\{(r \mp r')x - ar\}^2 + (y^2 + z^2)\{(r \mp r')^2 - a^2\} = 0. \quad (*)$$

Voilà l'équation que nous avions en vue de trouver : en la considérant par rapport au signe supérieur, elle appartient au cône circonscrit aux deux sphères, et dont le sommet est sur le prolongement de la droite qui joint les centres; mais en prenant le signe inférieur, elle appartient au cône dont le sommet est entre les deux sphères. Si l'une d'elles était un corps lumineux, et que l'autre fût un corps opaque éclairé par le premier, la partie pure de l'ombre serait déterminée par le premier cône, et la partie de la pénombre le serait par le second cône. Il est évident que cette conséquence est générale, quelles que soient d'ailleurs les équations des surfaces des deux corps que l'on considère. M. Monge est le premier qui ait résolu le problème général des ombres. Les observations importantes dans lesquelles ce savant géomètre est entré à ce sujet, ne pouvant qu'intéresser les amateurs de l'analyse et de la géométrie descriptive, nous les engageons à consulter les *Mémoires des Savans étrangers*, t. IX.

---

(*) Lorsque $z = 0$, on a $y = \pm \dfrac{(r - r')x - ar}{\sqrt{a^2 - (r - r')^2}}$; d'où l'on voit que les traces de la surface conique sur le plan $xy$, sont deux droites placées symétriquement à l'égard de l'axe des $x$, et que leur point d'intersection, qui est en même tems le sommet du cône, est donné par l'abscisse $x = \dfrac{ar}{r - r'}$, comme on l'a trouvé ci-dessus.

# CHAPITRE VII.

*Problèmes et théorèmes dont les solutions ou les démonstrations sont fondées sur la théorie précédente.*

134. VOICI encore diverses propositions de géométrie aux trois dimensions, qui peuvent être traitées par l'analyse élémentaire, et dont quelques-unes sont des généralisations de certaines propositions que j'ai données dans la section précédente. Comme le Journal de l'École Polytechnique et la Correspondance sur cette école fournissent une ample moisson de problèmes et de théorèmes de ce genre, je ne présenterai guères ici que ceux qui ont fait l'objet de mes propres recherches, ou qui donnent lieu à des calculs simples.

PROBLÈME.

*Connaissant les aires de deux sections parallèles faites dans la sphère, et la distance de ces sections; trouver le rayon de la sphère, et le volume du segment qui a ces mêmes sections pour bases.*

Les sections de la sphère étant des cercles, on aura leurs rayons par l'une des formules du n°. 22; et si par le centre

de la sphère on mène un plan perpendiculaire aux sections dont il s'agit, ce plan coupera ces sections suivant deux cordes parallèles qui seront respectivement les diamètres de ces mêmes sections : ainsi la question sera d'abord réduite à déterminer le rayon d'un grand cercle de la sphère, connaissant les longueurs des cordes parallèles, et leur plus courte distance.

[Fig. 89]. Cela posé, soient $Mm$, $M'm'$, les diamètres des sections de la sphère; et désignons par $\alpha\,\beta$, $\alpha'\,\beta'$, les coordonnées des points $M$, $M'$; par $z'$ la flèche $BP'$; par $h$ l'intervalle $PP'$; enfin par $r$ le rayon cherché $AB$; on aura $\alpha = r - z' - h$, $\alpha' = r - z'$. Or, par la propriété du cercle, on a

$$\left.\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= r^2\\ \alpha'^2 + \beta'^2 &= r^2\end{aligned}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{aligned}(r-h-z')^2 + \beta^2 &= r^2\\ (r-z')^2 + \beta'^2 &= r^2\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

développant et prenant la différence de ces deux dernières équations, on trouve

$$z' = \frac{\beta'^2 - \beta^2}{2h} + r - \frac{h}{2};$$

mais soit, pour simplifier,

$$\frac{\beta^2 - \beta'^2}{h} = u,$$

on aura

$$z' = -\frac{u}{2} + r - \frac{h}{2};$$

substituant cette valeur dans la seconde équation $(A)$ réduite, on obtiendra

$$4r^2 = 4\beta'^2 + (u+h)^2.$$

Ce résultat est précisément l'expression de la propriété du triangle rectangle qui a $2r$ pour hypothénuse, et dont les deux côtés de l'angle droit sont $2\beta'$ et $u+h$; donc, si au point $m'$ on élève $m'N$ perpendiculairement à la plus petite corde $M'm'$, et que l'on prenne $QN$ égale à la quatrième proportionnelle aux trois lignes $m'Q$, $MQ$, $Qm$, c'est-à-dire $= \frac{\beta^2 - \beta'^2}{h}$, la droite $NM'$ sera le diamètre demandé.

Il s'agit maintenant de trouver l'expression du volume du segment sphérique $MM'm'm$. Or, le segment sphérique à une seule base étant la différence du secteur circulaire au cône qui a pour base celle du segment, et dont le sommet est au centre de la sphère, il s'ensuit que le segment sphérique $MBm$ a pour mesure $\pi z^2 (r - \frac{1}{3}z,)$ et que celle du segment sphérique $M'Bm'$ est $\pi z'^2 (r - \frac{1}{3}z')$; $z$ et $z'$ désignant respectivement les flèches $BP$, $BP'$. Le volume du segment $MM'm'm$, que l'on considère, est donc

$$V = \pi r (z^2 - z'^2) - \tfrac{1}{3}\pi (z^3 - z'^3).$$

mais $h = z - z'$, par conséquent,

$$V = \pi h [r(z + z') - \tfrac{1}{3}(z^2 + zz' + z'^2)].$$

D'ailleurs l'équation du cercle, en plaçant l'origine au point $B$, donnant (n°. 41.)

$$\beta^2 = 2rz - z^2, \qquad \beta'^2 = 2rz' - z'^2,$$

on a

$$\beta^2 + \beta'^2 = 2r(z + z') - (z^2 + z'^2),$$

d'où l'on tire

$$r(x+x') = \frac{\beta^2+\beta'^2+z^2+z'^2}{2};$$

et cette valeur étant substituée dans celle de $V$, on trouve

$$V = h\left(\frac{\pi\beta^2+\pi\beta'^2}{2}\right)+\frac{\pi h^3}{6};$$

C'est-à-dire que *le volume du segment sphérique à deux bases parallèles a pour mesure la demi-somme de ces bases multipliée par son épaisseur, plus le volume de la sphère dont cette épaisseur est le diamètre.*

## PROBLÈME.

135. *Mener un plan à travers tant de points donnés qu'on voudra, de manière qu'en abaissant de ces points des perpendiculaires à ce plan, la somme des perpendiculaires situées d'un côté soit égale à la somme de celles qui se trouvent de l'autre côté.*

Soient

$$\left.\begin{matrix}\alpha\ \beta\ \gamma\\ \alpha'\ \beta'\ \gamma'\\ \alpha''\beta''\gamma''\end{matrix}\right\}\ \text{les coordonnées des points}\ \left\{\begin{matrix}M,\\ M',\\ M''.\end{matrix}\right.$$

Le plan sur lequel sont abaissées les perpendiculaires, a généralement pour équation,

$$+Ax+By+Cz+D=0,$$

ou pour plus de simplicité,

$$z = ax + by + c;$$

et la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point $x\,y\,z$ sur ce même plan, a pour expression

$$\frac{z - ax - by - c}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Il suit de là et de l'énoncé de la proposition, que

$$\gamma - a\alpha - b\beta - c + \gamma' - a\alpha' - b\beta' - c = -\gamma'' + a\alpha'' + b\beta'' + c;$$

en prenant négativement les valeurs des perpendiculaires qui sont situées au-dessous du plan. Si, de cette égalité, on tire la valeur de $c$, on aura

$$c = \frac{-a(\alpha + \alpha' + \alpha'') - b(\beta + \beta' + \beta'') + \gamma + \gamma' + \gamma''}{3}.$$

Comme on ne peut pas établir d'autre relation entre les coefficiens inconnus $a\ b\ c$, il est évident qu'il existe une infinité de plans qui satisfont à la question proposée : or, en substituant la valeur précédente de $c$ dans . . . . . $z = ax + by + c$, il en résultera

$$z - \frac{\gamma + \gamma' + \gamma''}{3} = a\left(x - \frac{\alpha + \alpha' + \alpha''}{3}\right) + b\left(y - \frac{\beta + \beta' + \beta''}{3}\right);$$

cette équation est visiblement celle d'un plan mené par un point fixe, dont les coordonnées sont

$$\frac{\alpha + \alpha' + \alpha''}{3}, \quad \frac{\beta + \beta' + \beta''}{3}, \quad \frac{\gamma + \gamma' + \gamma''}{3};$$

ou en général,

$$\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''\ldots\alpha^{(r-1)}}{n};\ \frac{\beta+\beta'+\beta''\ldots\beta^{(r-1)}}{n},\ \frac{\gamma+\gamma'+\gamma''\ldots\gamma^{(r-1)}}{n};$$

$n$ désignant le nombre des points donnés.

De là découle cette conséquence remarquable, savoir : que tout plan qui passe par le centre des moyennes distances de plusieurs points placés comme on voudra, à l'égard de trois plans rectangulaires, jouit de la propriété exigée par l'énoncé du problème proposé.

On traiterait aussi facilement la question inverse, c'est-à-dire, que l'on pourrait prouver que la somme des perpendiculaires abaissées d'un côté du plan, passant constamment par le centre des moyennes distances, est égale à la somme des perpendiculaires abaissées de l'autre côté ; en effet, l'équation générale de ce plan est (n°. 107.)

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0.$$

Mais dans cette circonstance,

$$x'=\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{3},\ y'=\frac{\beta+\beta'+\beta''}{3},\ z'=\frac{\gamma+\gamma'+\gamma''}{3},$$

$$\text{et } \frac{A}{C}=-a,\ \frac{B}{C}=-b,$$

ainsi, au moyen de ces valeurs, et en faisant d'ailleurs pour abréger, $\alpha+\alpha'+\alpha''=[\alpha]$, $\beta+\beta'+\beta''=[\beta]$, $\gamma+\gamma'+\gamma''=[\gamma]$, l'équation précédente devient

$$z=ax+by-a\frac{[\alpha]}{3}-b\frac{[\beta]}{3}+\frac{[\gamma]}{3}. \quad (1)$$

Or, la somme des perpendiculaires abaissées des points $M$, $M'$ sur le plan dont il est question, est, d'après ce qui

précède, et en faisant pour le moment abstraction du dénominateur $\sqrt{1+a^2+b^2}$.,

$$\gamma+\gamma'-a(\alpha+\alpha')-b(\beta+\beta')+2a\frac{[\alpha]}{3}+2b\frac{[\beta]}{3}-2\frac{[\gamma]}{3};$$

ajoutant à cette somme la quantité nulle,

$$a[\alpha]-a[\alpha]+b[\beta]-b[\beta]+[\gamma]-[\gamma];$$

puis réduisant, on aura, à cause de $[\alpha]=\alpha+\alpha'+\alpha''$; etc.,

$$-\gamma''+a\alpha''+b\beta''-a\frac{[\alpha]}{3}-b\frac{[\beta]}{3}+\frac{[\gamma]}{3}.$$

Ce résultat auquel on doit rèstituer le dénominateur $\sqrt{1+a^2+b^2}$, étant l'expression même de la perpendiculaire abaissée du point $M''$ sur le plan proposé (1), et en sens contraire des deux premières, il s'ensuit que les deux sommes faites séparément des perpendiculaires positives et négatives sont dans le rapport d'égalité ; et, il est incontestable que cette propriété a toujours lieu, quels que soient le nombre des points donnés et les valeurs de $a$, $b$. Nous allons passer à la solution d'un autre problême dont celui-ci est un cas particulier.

## PROBLÈME.

136. *Mener un plan dans l'espace, de manière que la somme des perpendiculaires abaissées sur ce plan et de plusieurs points donnés à volonté, soit égale à une droite donnée* m.

Supposons que les perpendiculaires soient d'un même

côté du plan cherché et au nombre de trois seulement, pour abréger le calcul ; l'équation de ce plan sera

$$z = ax + by + c ;$$

et la perpendiculaire à ce même plan aura généralement pour expression

$$\frac{z - ax - by - c}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Ainsi, relativement aux points donnés $x'y'z'$, $x''y''z''$, $x'''y'''z'''$, on aura, en se conformant d'ailleurs à l'énoncé de la proposition,

$$(z' - ax' - by' - c) + (z'' - ax'' - by'' - c) + (z''' - ax''' - by''' - c) = m\sqrt{1 + a^2 + b^2}.$$

Substituant, dans l'équation du plan cherché, pour $c$ sa valeur tirée de l'équation précédente, on obtiendra

$$z - \frac{z' + z'' + z'''}{3} = a\left(x - \frac{x' + x'' + x'''}{3} - \frac{m}{3}\frac{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}{a}\right) + b\left(y - \frac{y' + y'' + y'''}{3}\right).$$

Si on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes, et si on place leur origine au centre des moyennes distances des trois points donnés, on aura simplement, en désignant par $x_1 y_1 z_1$ les coordonnées relatives aux nouveaux axes,

$$z_1 = a\left(x_1 - \frac{m}{3}\frac{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}{a}\right) + by_1.$$

Cette équation est évidemment celle d'un plan mené par

un point de l'axe des $x$, distant de la nouvelle origine de la quantité $\frac{m}{3}\frac{\sqrt{1+a^2+b^2}}{a}$. Mais cette quantité désigne précisément l'abscisse du point par lequel passerait un plan à la fois parallèle à un autre plan donné à volonté, et tangent à une sphère ayant pour rayon $\frac{m}{3}$ (n°. 131), ou en général $\frac{m}{n}$, $n$ étant le nombre des points donnés, et $m$ la somme des perpendiculaires. Donc, tous les plans qui satisfont à la proposition sont tangens à une sphère dont le centre est celui des moyennes distances des points donnés, et dont le rayon est égal à la somme des perpendiculaires en question, divisée par le nombre de ces points.

Il est remarquable que cette conséquence se déduirait immédiatement, et sans calcul, du *Principe des momens*, démontré en statique; mais il convient de prouver les propositions de pure géométrie par le seul secours de l'analyse.

## THÉORÈME.

137. *Dans tout quadrilatère plan ou gauche la somme des carrés des deux diagonales, plus quatre fois le carré de la ligne qui joint les milieux de ces diagonales, est égale à la somme des carrés des quatre côtés.*

[Fig. 90.] Soient

$$\left.\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}x'\\y'\\z'\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}x''\\y''\\z''\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}x'''\\y'''\\z'''\end{matrix}\right\}$$

les coordonnées des points

$$M \qquad M' \qquad M'' \qquad M'''$$

situés d'une manière quelconque dans l'espace.

Faisons en outre

$$AM = a,\ AM' = a',\ AM'' = a'',\ AM''' = a''',$$
$$MM' = c,\ MM''' = c',\ M'M'' = c'',\ M''M''' = c''',$$
$$MM'' = D,\ M'M''' = D',\quad nn' = \mu.$$

Il est visible que les coordonnées des points $n$, $n'$, milieux des diagonales $D$, $D'$, sont

pour le premier, $\frac{x+x''}{2}$, $\frac{y+y''}{2}$, $\frac{z+z''}{2}$,

et pour le second, $\frac{x'+x'''}{2}$, $\frac{y'+y'''}{2}$, $\frac{z'+z'''}{2}$.

Cela posé, on a évidemment, par la propriété du triangle rectangle,

$$D^2 = (x-x'')^2 + (y-y'')^2 + (z-z'')^2,$$
$$D'^2 = (x'-x''')^2 + (y'-y''')^2 + (z'-z''')^2,$$
$$4\mu^2 = [x+x''-(x'+x''')]^2 + [y+y''-(y'+y''')]^2 + [z+z''-(z'+z''')]^2.$$

Développant les puissances indiquées, et n'écrivant, pour abréger, que les premiers termes des quantités qui sont de la forme $2(xx'+yy'+zz')$, on obtiendra, à cause de $x^2+y^2+z^2 = a^2$, etc.

$$D^2 = a^2 + a''^2 - 2(xx''\ldots),$$
$$D'^2 = a'^2 + a'''^2 - 2(x'x'''\ldots),$$
$$4\mu^2 = a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2 - 2(xx'\ldots) - 2(xx'''\ldots) - 2(x'x''\ldots) - 2(x''x'''\ldots) + 2(xx''\ldots) + 2(x'x'''\ldots).$$

additionnant ces équations, il viendra, après avoir effacé les termes qui se détruisent,

$$D^2+D'^2+4\mu^2=[a^2+a'^2-2(x\,x'\ldots)]+[a^2+a'''^2-2\,(x\,x'''..)],$$
$$+[a'^2+a''^2-2(x'x''..)]+[a''^2+a'''^2-2\,(x''x'''..)].$$

Mais les premier, deuxième, troisième et quatrième termes du second membre de celles-ci, sont respectivement les carrés des quatre côtés $c\ c'\ c''\ c'''$ ; donc

$$D^2+D'^2+4\,\mu^2=c^2+c'^2+c''^2+c'''^2;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Lorsque $\mu=0$, les deux diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales, et le quadrilatère se change en rhombe; alors on a simplement

$$D^2+D'^2=2\,c^2+2\,c'^2,$$

comme on le savait déja.

Cette proposition élégante dont Euler avait seulement reconnu l'existence pour le quadrilatère plan, (Tome V, des *Nouveaux Commentaires de Pétersbourg*), et que M. Carnot a généralisée dans sa Géométrie de position, peut être demontrée plus rapidement à l'aide du théorême du n°. 48, et cela doit être, parce qu'alors on part d'une relation immédiate entre les lignes que l'on considère dans le quadrilatère.

## THÉORÊME

*concernant l'hexaèdre irrégulier.*

138. [Fig. 91.] Soit l'hexaèdre irrégulier *Ac* pour lequel

nous ferons

$$Aa=a,\ Cc=b,\ ab=e,\ cd=f,$$
$$bc=g,\ ad=h,\ ac=m,\ bd=m',$$
$$Bb=A,\ Dd=B,\ AB=E,\ CD=F,\ aC=d,\ Ac=d',$$
$$BC=G,\ AD=H,\ AC=M,\ BD=M',\ bD=D,\ Bd=D'.$$

La ligne qui joint les milieux des diagonales $\begin{cases} DD'=P,\ MM'=Q, \\ dd'=p,\ mm'=q. \end{cases}$

Cela posé, les quadrilatères *abcd*, *ABCD* donneront, par ce qui précède,

$$m^2+m'^2=e^2+f^2+g^2+h^2-4q^2,$$
$$M^2+M'^2=E^2+F^2+G^2+H^2-4Q^2.$$

Les quadrilatères *ACca*, *BDdb* fourniront de même

$$a^2+b^2+m^2+M^2=d^2+d'^2+4p^2,$$
$$A^2+B^2+m'^2+M'^2=D^2+D'^2+4P^2;$$

ajoutant ces dernières équations, et substituant pour $m^2+m'^2$ et $M^2+M'^2$ leurs valeurs, on aura

$$\left.\begin{matrix} a^2+b^2+e^2+f^2+g^2+h^2 \\ +A^2+B^2+E^2+F^2+G^2+H^2 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} d^2+d'^2+D^2+D'^2 \\ +4p^2+4q^2+4P^2+4Q^2; \end{matrix}\right.$$

formule qui, étant traduite en langage ordinaire, serait l'énoncé d'un beau théorême relatif aux hexaèdres dont les arêtes forment des quadrilatères quelconques.

On conçoit que quand toutes les faces d'un hexaèdre sont des parallélogrammes, les lignes $P$, $p$, $Q$, $q$ sont nulles; pour lors, l'équation précédente se réduit à

$$4A^2+4E^2+4G^2=D^2+D'^2+d^2+d'^2;$$

c'est-à-dire que *dans tout parallélipipède, la somme des*

*carrés des quatre diagonales est égale à la somme des carrés des douze arêtes.*

## PROBLÈME.

139. *Par deux points donnés dans l'espace, mener deux droites qui fassent entre elles un angle donné.*

Soient en général $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ les coordonnées rectangulaires des points donnés $A$, $A'$; et $x$, $y$, $z$, celles du sommet $M$ de l'angle donné.

Les équations des droites $AM$, $A'M$ sont respectivement

$$\left.\begin{aligned}\alpha - x &= a(\gamma - z)\\ \beta - y &= b(\gamma - z)\end{aligned}\right\} \text{ et } \left\{\begin{aligned}\alpha' - x &= a'(\gamma' - z)\\ \beta' - y &= b'(\gamma' - z)\end{aligned}\right.$$

or, si $V$ désigne l'angle de ces ceux droites, on aura n°. 105,

$$\text{tang } V = \frac{\sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2 + (ab' - a'b)^2}}{1 + aa' + bb'}. \quad (1)$$

Substituant donc pour $a$, $a'$, $b$, $b'$ leurs valeurs fournies par les équations précédentes, on obtiendra une équation en $xyz$ qui sera celle de la surface sur laquelle sont situés tous les points $M$ qui résolvent la question; mais comme cette question conserve évidemment toute sa généralité, quelle que soit la position des points $A$, $A'$, à l'égard des plans coordonnés, supposons que le point $A$ soit l'origine et que le point $A'$ soit sur l'axe des $x$; alors les équations des droites $AM$, $A'M$ se réduiront à

$$\begin{aligned} x &= az, & x - \alpha' &= a'z,\\ y &= bz, & y &= b'z; \end{aligned}$$

et la valeur de tangente $V$ sera simplement, toutes réductions faites,

$$\text{tang } V = \frac{a' \sqrt{y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2 - a'x};$$

partant

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a'x)^2 = \frac{a'^2}{\text{tang}^2 V}(y^2 + z^2). \quad (2)$$

Quoique cette formule soit encore assez compliquée, cela n'empêche pas que l'on ne reconnaisse aisément qu'elle donne lieu à une surface de révolution engendrée par un arc de cercle capable de l'angle $V$ et tournant autour de sa corde $AA' = a'$. En effet, si on fait passer un plan par cette droite et par le point $M$, et qu'on désigne par $u$ une ordonnée prise dans ce plan, perpendiculairement à $x$, on aura, à cause de $u^2 = y^2 + z^2$,

$$(x^2 + u^2 - a'x)^2 = \frac{a'^2}{\text{tang}^2 V} u^2;$$

ou extrayant la racine carrée de part et d'autre

$$x^2 + u^2 - a'x = \pm \frac{a'u}{\text{tang } V}. \quad (3)$$

Cette équation entre $x$ et $u$ est celle du cercle (n°. 81), et reste la même quelle que soit la position du plan $AMA'$; le sommet de l'angle constant des deux droites $AM$, $A'M$ est donc sur la surface du solide de révolution dont il vient d'être parlé.

On voit par là le moyen de résoudre la question suivante : *déterminer la position d'un point situé hors d'un plan, en supposant que l'on connaisse les angles que font entre elles les droites menées de ce point à trois autres*

*points donnés sur ce plan.* (*Voyez* pour la solution graphique de ce problême, la *Géométrie descriptive* de Monge ou celle de Lacroix.) En y appliquant l'analyse, on aurait, comme je l'ai fait voir dans mon *Traité de Géodésie*, à résoudre une équation du huitième degré. M. Lacroix a obtenu depuis longtems le même résultat, en suivant une marche analogue à la précédente; mais il n'a point publié ses calculs.

## PROBLÊME.

140. *Etant donnés tant de points qu'on voudra dans l'espace, en trouver un autre, tel que menant par ce point une droite à chacun des autres, la somme des carrés de ces lignes soit égale à un carré donné.*

Supposons, pour abréger les calculs, qu'il n'y ait que trois points donnés; ce qui n'ôte rien de la généralité de la solution du présent problême; et appelons

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix}\alpha''\\ \beta''\\ \gamma''\end{matrix}\right\}$$

les coordonnées des points

$$A \qquad A' \qquad A''.$$

Soient en outre $xyz$, celles du point $M$ cherché.

On aura en vertu du n°. 102,

$$\left.\begin{aligned} \overline{AM} &= (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\\ \overline{A'M} &= (x-\alpha')^2+(y-\beta')^2+(z-\gamma')^2\\ \overline{A''M} &= (x-\alpha'')^2+(y-\beta'')^2+(z-\gamma'')^2 \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Si on égale à $q^2$ la somme des seconds membres de ces équations développées, on aura, après avoir divisé tout par 3,

$$x^2+y^2+z^2$$
$$-\tfrac{2}{3}(\alpha+\alpha'+\alpha'')x-\tfrac{2}{3}(\beta+\beta'+\beta'')y-\tfrac{2}{3}(\gamma+\gamma'+\gamma'')z$$
$$=q^2-\frac{(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2+\beta^2+\beta'^2+\beta''^2+\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2)}{3}.$$

Il suit de cette équation, que tous les points qui satisfont au problème, sont situés sur la surface d'une sphère dont le centre est précisément celui des forces parallèles supposées toutes égales entre elles et appliquées aux points donnés $A$, $A'$, $A''$...., ou, ce qui est de même, celui des *moyennes distances* de ces mêmes points aux trois plans coordonnés.

En effet, le moyen de transporter l'origine au centre de la sphère, est de mettre dans l'équation précédente, $x'+\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{3}$, $y'+\frac{\beta+\beta'+\beta''}{3}$, $z'+\frac{\gamma+\gamma'+\gamma''}{3}$; au lieu de $x$, $y$, $z$; et comme la résultante est de la forme

$$x'^2+y'^2+z'^2=R^2,$$

il s'ensuit que les coordonnées du centre de la sphère à décrire sont, en général,

$$\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''...}{n},\quad \frac{\beta+\beta'+\beta''...}{n},\quad \frac{\gamma+\gamma'+\gamma''...}{n};$$

$n$ étant le nombre des points donnés; ce centre est donc celui des moyennes distances de ces points aux trois plans coordonnés.

141. Il est à propos de remarquer que la somme des seconds membres des équations ($A$) est susceptible d'être

exprimée en fonction des moyennes distances, et c'est à quoi nous allons parvenir, sans recourir à aucun principe de géométrie.

Supposons que l'on ait $n$ binomes de la forme

$$(x-\alpha)^2,\ (x-\alpha')^2,\ (x-\alpha'')^2 \ldots (x-\alpha^{[n-1]})^2.$$

en les développant et en les ajoutant, leur somme sera

$$nx^2 - 2(\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots \alpha^{[n-1]})x + (\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \ldots \alpha^{[n-1]2}) = S. \quad (1)$$

Soit pour simplifier

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' \ldots = [\alpha],\quad \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 \ldots [\alpha^2],$$

on aura

$$nx^2 - 2[\alpha]x + [\alpha^2] = S,$$

et l'on peut donner à cette expression la forme

$$nx^2 + \frac{n}{n^2}[\alpha^2] + \frac{n(n-1)}{n^2}[\alpha^2] - \frac{2nx}{n}[\alpha] = S; \quad (2)$$

or il est facile de voir que

$$nx^2 + \frac{n}{n^2}[\alpha^2] - \frac{2nx}{n}[\alpha]$$
$$= n\left(x - \frac{[\alpha]}{n}\right)^2 - \frac{2n}{n^2}(\alpha\alpha' + \alpha\alpha'' \ldots);$$

et si l'on fait encore pour simplifier,

$$\alpha\alpha' + \alpha\alpha'' \ldots \alpha'\alpha'' \ldots = [\alpha\alpha'],$$

l'équation (2) deviendra

$$n\left(x - \frac{[\alpha]}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)}{n^2}[\alpha^2] - \frac{2n}{n^2}[\alpha\alpha'] = S. \quad (3)$$

D'un autre côté, les second et troisième termes du premier membre de cette équation peuvent être écrits ainsi:

$$[\alpha^2]+\frac{n}{n^2}[\alpha^2]-\frac{2n}{n^2}[\alpha^2]+\frac{2n}{n^2}[\alpha\alpha']-\frac{4n}{n^2}[\alpha\alpha']$$
$$=[\alpha^2]+\frac{n}{n^2}[\alpha^2]+\frac{2n}{n^2}[\alpha\alpha']-\frac{2n}{n^2}[\alpha]^2;$$

et en examinant avec attention le second membre de cette équation identique, on reconnaît qu'il dérive du développement de

$$\left(\alpha-\frac{[\alpha]}{n}\right)^2+\left(\alpha'-\frac{[\alpha]}{n}\right)^2+\left(\alpha''-\frac{[\alpha]}{n}\right)^2+\ldots.$$

Il suit de là que l'équation (3) ou (1) prend la forme

$$n\left(x-\frac{[\alpha]}{n}\right)^2+\left(\alpha-\frac{[\alpha]}{n}\right)^2$$
$$+\left(\alpha'-\frac{[\alpha]}{n}\right)^2+\left(\alpha''-\frac{[\alpha]}{n}\right)^2+\ldots=S.$$

Donc, si on ajoute ensemble les équations $(A)$, l'on aura cette relation remarquable

$$\left.\begin{array}{l}\left(\alpha-\frac{[\alpha]}{3}\right)^2+\left(\beta-\frac{[\beta]}{3}\right)^2+\left(\gamma-\frac{[\gamma]}{3}\right)^2\\+\left(\alpha'-\frac{[\alpha]}{3}\right)^2+\left(\beta'-\frac{[\beta]}{3}\right)^2+\left(\gamma'-\frac{[\gamma]}{3}\right)^2\\+\left(\alpha''-\frac{[\alpha]}{3}\right)^2+\left(\beta''-\frac{[\beta]}{3}\right)^2+\left(\gamma''-\frac{[\gamma]}{3}\right)^2\\+3\left(x-\frac{[\alpha]}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{[\beta]}{3}\right)^2+3\left(z-\frac{[\gamma]}{3}\right)^2\end{array}\right\}=q^2.$$

Donc, *dans tout polygone rectiligne plan ou gauche, la*

*somme des carrés des distances de tous les angles à un point quelconque pris dans l'espace, est égale à la somme des carrés des distances de ces mêmes angles au centre des moyennes distances, plus au carré de la distance de ce centre au premier point pris dans l'espace, multiplié par le nombre des angles du polygone.*

Au-delà de trois dimensions, la relation précédente ne signifie plus rien en géométrie, mais étant appliquée aux nombres, elle en exprime, comme on voit, une assez belle propriété.

Si on demandait, maintenant, que la somme $q^2$ fût un *minimum*, on verrait que le point cherché $xyz$ serait le centre même des moyennes distances de tous les points donnés; en effet, puisque dans l'équation précédente les termes de la quatrième ligne sont les seuls qui varient, et que la somme de ces termes est essentiellement positive, il faut, pour que cette somme devienne nulle, que l'on ait séparément

$$x-\frac{[\alpha]}{3}=0,\quad y-\frac{[\beta]}{3}=0,\quad z-\frac{[\gamma]}{3}=0.$$

C'est aussi à quoi l'on serait conduit en égalant à zéro la différentielle de la valeur de $q^2$. (*Calcul différentiel* de Lacroix); différentielle qui doit être prise successivement par rapport à $x$, $y$, $z$, vu l'indépendance de ces variables.

### *Recherches des équations des courbes qui résultent des sections du cône par un plan.*

142. Lorsque l'on eut découvert, par la géométrie, les principales propriétés des différentes courbes que l'on

obtient en coupant un cône par un plan, et que l'on eut inventé l'algèbre, on chercha à vérifier ces propriétés par le calcul algébrique, en considérant simplement ces courbes en elles-mêmes ; c'est-à-dire qu'on les regarda comme des lignes tracées sur un plan suivant une certaine loi, ou comme des cas particuliers de l'équation la plus générale du second degré entre deux variables. Pour démontrer synthétiquement l'identité de ces courbes avec les intersections du cône oblique à base circulaire, on suppose, dans tous les livres élémentaires, que le plan coupant est toujours perpendiculaire au plan mené par l'axe (n°. 151. *L. C.*), mais cette méthode, qui n'est point générale, laisse par conséquent quelque chose à desirer. En voici une autre entièrement analytique, qui remplit mieux le but, et me paraît plus simple que toutes celles qui ont été employées jusqu'à présent pour cet objet.

[Fig. 92.] L'équation de la surface du cône oblique, est, par le n°. 126,

$$(a^2+b^2-r^2)z^2+c^2(x^2+y^2)-2acxz-2bcyz=0\,; \quad (C)$$

son sommet étant placé à l'origine des coordonnées rectangulaires, sa base étant parallèle au plan des $xy$, le centre $O$ de cette base ayant pour coordonnées $a$, $b$, $c$, et son rayon $BO$ étant désigné par $r$.

Le moyen qui semble le plus commode pour discuter la courbe d'intersection cherchée, est, comme au n°. 117, de placer l'origine et la direction des axes, de manière que deux des nouvelles coordonnées relatives à la surface du cône soient précisément dans le plan coupant ; car, on conçoit que pour toute la partie commune à ce plan et à la surface conique, la troisième coordonnée est nulle. Nous

pourrions donc employer, à cet effet, les formules

$$\begin{aligned} x &= \alpha + x' \cos\varphi + y' \sin\varphi \cos\theta, \\ y &= \beta + x' \sin\varphi - y' \cos\varphi \cos\theta, \\ z &= \gamma + y' \sin\theta ; \end{aligned}$$

$\varphi$ étant l'angle que la trace horisontale $X'K$ du plan coupant $Y'KX'$, fait avec l'axe des $x$, et $\theta$ l'angle que ce même plan forme avec celui des $xy$. Mais pour simplifier les calculs, sans altérer en rien leur généralité, nous ferons, dans ces formules, $\sin\varphi = 1$ et $\beta = 0$, c'est-à-dire que nous placerons la nouvelle origine $N$ dans le plan $xz$; alors on aura $Ap = \alpha$, $pN = \gamma$, angle $Y'KX = \theta$, et, partant,

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha + \cos\theta . y' \\ y &= x' \\ z &= \gamma + \sin\theta . y' \end{aligned}\right\} \text{ ou simplement } \left\{\begin{aligned} x &= \alpha + my', \\ y &= x', \\ z &= \gamma + ny'. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, si on élimine de l'équation $(C)$, les variables $x\,y\,z$ à l'aide de ces valeurs, on obtiendra, en faisant $a^2 + b^2 - r^2 = p$

$$\left.\begin{aligned} &(pn^2 + c^2m^2 - 2acmn)y'^2 - 2bcnx'y' + c^2x'^2 \\ &+ 2(p\gamma n + \alpha c^2 m - a\alpha cn - ac\gamma m)y' - 2bc\gamma x' \\ &+ p\gamma^2 + \alpha^2 c^2 - 2a\alpha c\gamma = 0. \end{aligned}\right\} (D).$$

Cette équation, qui est celle de la courbe d'intersection du plan $x'y'$ et de la surface conique, donne nécessairement naissance à l'une des trois courbes du second ordre, puisqu'elle est de la forme

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Dy' + Ex' + F = 0. \quad (D')$$

Il ne s'agit donc plus que d'assigner la position du plan sécant, pour qu'il en résulte telle ou telle courbe.

Si on suppose d'abord $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, ce plan passera par l'origine, et on aura simplement

$$\left.\begin{array}{l}(pn^2 + c^2m^2 - 2acmn)\,y'^2 - 2bcnx'y' + c^2x'^2 = 0,\\ \text{ou}\qquad\qquad Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 = 0.\end{array}\right\}\ (E)$$

Cette nouvelle formule appartient en général au système de deux droites; car, en la résolvant par rapport à $y'$, on obtient

$$y' = \left[\frac{-B \pm \sqrt{\{B^2 - 4AC\}}}{2A}\right]x';$$

d'où il suit que tant que la quantité $B^2 - 4AC$ n'est pas nulle ou négative, la section entière du plan $x'y'$ passant par le sommet du cône, forme un triangle; mais lorsque $B^2 - 4AC = 0$, les deux droites fournies par l'équation précédente se confondant, le plan coupant est évidemment tangent à la surface conique. Cette circonstance a donc lieu quand le premier membre de l'équation $(E)$ est un carré.

Si, en supposant seulement $\gamma = 0$, on cherchait ce que devient la section du plan $x'y'$ dans le cas où $n = 0$, l'équation $(D)$ se réduirait à

$$(y' + \alpha)^2 + x'^2 = 0;$$

et, comme alors la valeur de $y'$ ne peut être réelle qu'autant que $x' = 0$, auquel cas, $y' = -\alpha$, il en résulte que la section se réduit à un point; ce qui est d'ailleurs évident.

Pour une section parabolique, l'équation $(D)$ fournit entre les coefficiens de ses trois premiers termes, la relation

$B^2 - 4AC = 0$, ou $b^2n^2 - pn^2 - c^2m^2 + 2acmn = 0$,

que l'on peut mettre sous la forme suivante, en remplaçant $p$ par sa valeur,

$$(an - cm)^2 = r^2n^2,$$

et d'où l'on tire

$$\frac{n}{m} = \text{tang}\,\theta = \frac{c}{a \mp r}.$$

Ce résultat nous apprend que pour que la section soit une parabole, le plan coupant qui passe ailleurs que par la primitive origine $A$, [Fig. 93] doit être parallèle à la ligne génératrice du cône. En effet, si on forme le prisme triangulaire $GAH$, $EFB$, la tangente de l'angle $FBE$ sera $\frac{EF}{EB} = \frac{c}{a - r} = \text{tang}\,\theta$ : donc le plan coupant qui a sa trace horisontale perpendiculaire à $BDF$, et qui fait un angle $\theta$ avec le plan $xy$, est nécessairement parallèle au plan $BAF$, et par conséquent à la génératrice $AB$. Pour le cas de $\text{tang}\,\theta = \frac{c}{a + r}$, il est clair que le plan coupant est parallèle à $AD$ ; mais alors la section parabolique a lieu dans le cône inférieur à $ABD$, formé par la même génératrice $AB$.

Si on résout l'équation $(D')$, et que l'on ait égard à la relation $B^2 - 4AC = 0$, on aura donc pour la parabole

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{2A} \sqrt{\{2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF\}}.$$

On voit bien aussi que $(D)$ est à l'ellipse ou à l'hyperbole

selon que $\text{tang}\,\theta > \frac{c}{a \mp r}$, ou $\text{tang}\,\theta < \frac{c}{a \mp r}$, puisque dans le premier cas, $B^2 - 4AC < 0$, et que, dans le second cas, $B^2 - 4AC > 0$ : or, pour l'un et l'autre, on a

$$y = -\frac{Bx + D}{2A}$$

$$\pm \frac{1}{2A} \sqrt{\{(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF\}};$$

et le plan sécant, qui engendre l'hyperbole, coupe à la fois les deux cônes opposés. Cette courbe a des asymptotes données par

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\left\{x\sqrt{B^2 - 4AC} + \frac{BD - 2AE}{\sqrt{B^2 - 4AC}}\right\}.$$

Enfin l'équation (*D*) est celle du cercle, si les deux équations de condition

$$pn^2 + c^2m^2 - 2acmn = c^2,$$
$$bcn = 0,$$

ont lieu à la fois, ou, ce qui est de même, si

$$\frac{n}{m}\left\{(p - c^2)\frac{n}{m} - 2ac\right\} = 0,$$

$$bc\frac{n}{m} = 0.$$

La première a deux racines, dont l'une, $\frac{n}{m} = \text{tang}\,\theta = 0$, satisfait à la seconde équation ; mais celle-ci, qui n'est que du premier degré, ne peut être vérifiée par la se-

conde racine tang $\theta = \frac{2ac}{p - c^2}$ ; il faut donc, pour ce cas, que l'on ait en outre $b = 0$. De cette analyse, il résulte que le plan coupant donne une section circulaire dans deux positions différentes ; d'abord lorsque ce plan est parallèle à la base du cône ; ensuite lorsque, formant avec cette base un angle dont la tangente $= \frac{2ac}{a^2 - r^2 - c^2}$, il est en même tems perpendiculaire à la section formée dans le cône par un autre plan perpendiculaire à la base de ce corps et passant par son axe.

La situation du plan coupant, à l'égard des génératrices $AB$, $AD$, [ Fig. 94 ] est facile à reconnaître, lorsque tang $\theta = \frac{2ac}{a^2 - r^2 - c^2}$ ; car si on imagine dans le cône la section triangulaire $ABD$, dont on vient de parler, la droite $BD$ sera le diamètre de la base conique, et la droite $AG$ la hauteur de ce cône : on aura alors $OB = \frac{BD}{2} = r$, $OG = a$, $AG = c$, $BG = a - r$ ; et soit l'angle $DBA = B$, l'angle $BDA = D$, on aura, par la formule trigonométrique connue,

$$\text{tang}\,(B - D) = \frac{\text{tang}\,B - \text{tang}\,D}{1 + \text{tang}\,B\,\text{tang}\,D}.$$

Or, pour le cas de la figure, tang $B = -\frac{c}{a - r}$, et tang $D = \frac{c}{a + r}$ ; il suit de là que

$$\text{tang}\,(B - D) = -\frac{-2ac}{a^2 - r^2 - c^2} ;$$

mais cette valeur est précisément celle de tangente prise

avec un signe contraire, donc tang $\theta = -$ tang $(B - D)$. Donc, si on fait l'angle $ABR = D$, on aura

$$\text{tang } R'BD = -\text{ tang } (B - D).$$

Ainsi, en menant par la droite $RR'$, ou par toute autre qui lui soit parallèle, un plan perpendiculaire à $BAD$, il engendrera une section circulaire sur la surface conique : section qu'on nomme *anti-parallèle* ou *sous-contraire*, eu égard à celle qui aurait lieu parallèlement à la base du cône : on voit bien que l'une et l'autre section se confondent lorsque $a = 0$, c'est-à-dire quand le cône est droit.

Euler, dans l'*Appendix de superficiebus* qui termine le second volume de son *Introd. in. analys. infinit.*, a traité aussi cette même question d'une manière très-générale (*) : il y considère le cône à base elliptique dont nous avons donné l'équation au n°. 126, mais nous avons jugé utile d'envisager la chose sous un point de vue un peu différent.

## THÉORÈME.

143. *Si deux plans rectangulaires sont assujétis à se mouvoir entre deux droites fixes, leur commune section engendrera un cône qui aura même sommet que celui de l'angle des deux droites fixes, et dont la base sera un cercle perpendiculaire à l'une ou à l'autre de ces droites.*

[Fig. 95.] Soient $AM$, $AM'$ les deux droites fixes données, ou les traces horisontales des deux plans rec-

(*) Voyez la traduction française de cet ouvrage, par *Labey*.

tangulaires passant par l'origine des coordonnées. Les équations de ces plans sont

$$Ax + By + Cz = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z = 0,$$

lesquelles ont lieu en même tems à la ligne d'intersection ; et la condition de perpendicularité est exprimée par

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

De là, on tire

$$(AA'+BB')z^2+BB'y^2+AA'x^2+(AB'+A'B)xy=0. \quad (1)$$

Telle est l'équation de la surface conique engendrée par la commune section des deux plans rectangulaires. Lorsque $z = 0$, on a seulement

$$(By + Ax)(B'y + A'x) = 0,$$

c'est-à-dire que le plan des $xy$ coupe le cône suivant les deux droites $AM$, $AM'$, dont les équations respectives sont

$$Ax + By = 0, \quad A'x + B'y = 0.$$

Tout plan parallèle à celui des $xy$ coupe le cône suivant une byperbole, puisque $(AB' - A'B)^2 > 0$ ; d'où il suit que le cône est placé obliquement à l'égard de ce plan.

Pour déterminer la position de la base circulaire de ce cône, il faut substituer dans l'équation (1) les valeurs

$$x = a + x' \cos\varphi + y' \cos\theta \sin\varphi,$$
$$y = \quad x' \sin\varphi - y' \cos\theta \cos\varphi,$$
$$z = \quad y' \sin\theta,$$

obtenues au n°. 117. Mais pour plus de simplicité, soit

$$\begin{aligned} x &= a + mx' + pny', \\ y &= \quad nx' - pmy', \\ z &= \quad qy', \end{aligned}$$

et l'on aura

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{l} (AA' + BB')\,q^2 + BB'p^2m^2 \\ + AA'p^2n^2 - (AB' + A'B)\,p^2nm \end{array} \right\} y'^2 \\ + &\left\{ BB'n^2 + AA'm^2 + (AB' + A'B)nm \right\} x'^2 \\ &\left\{ \begin{array}{l} + 2\,AA'nmp - 2\,BB'nmp \\ + (AB' + A'B)\,(n^2p - m^2p) \end{array} \right\} x'y' \\ &+ Mx' + Ny' + P = 0. \end{aligned}$$

La section, par le nouveau plan $x'y'$, sera un cercle, si les coefficiens de $x'^2$ et $y'^2$ sont égaux, et si celui de $x'y'$ est $= 0$ ; or, ce dernier devenant nul par la supposition de $\theta = 100^{gr}$, la première relation se réduit à

$$(Bm - An)\,(B'm - A'n) = 0;$$

d'où l'on tire

$$\frac{n}{m} = \text{tang}\,\varphi = \frac{B}{A}, \quad \text{ou } \frac{n}{m} = \text{tang}\,\varphi = \frac{B'}{A'};$$

mais les droites $AM$ et $AM'$ font avec $AX$ des angles dont les tangentes sont respectivement

$$-\frac{A}{B}, \qquad -\frac{A'}{B'};$$

donc la base circulaire du cône est perpendiculaire à l'une ou à l'autre de ces droites. *C. Q. F. D.*

Ce théorême, qui est dû à M. Hachette, se trouve démontré géométriquement dans le n°. 6 de la *Correspondance sur l'Ecole polytechnique*, pag. 179.

## THÉORÈME.

144. *D'un point donné sur un plan incliné, mener dans ce plan, une droite qui fasse, avec l'horison, un angle donné.*

L'équation du plan est

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

celles de la droite assujétie à passer par le point donné $x', y', z'$ sont

$$x - x' = a\,(z - z'), \qquad (1)$$
$$y - y' = b\,(z - z'). \qquad (2)$$

Or, ces trois équations doivent avoir lieu en même tems, pour que la droite et le plan coïncident ; et comme l'angle que cette droite fait avec le plan horisontal est connu, si on le désigne par $V$, on aura (n°. 105)

$$\sin V = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}; \qquad (3)$$

de plus, la condition nécessaire pour que cette droite soit parallèle au plan, est (n°. 110)

$$Aa + Bb + C = 0; \qquad (4)$$

si donc l'on tirait de ces dernières équations les valeurs

de $a$ et $b$, et qu'on les substituât dans les équations (1) et (2), on aurait celles de la droite cherchée, exprimées en fonctions de l'angle donné; mais il est plus élégant d'effectuer le calcul suivant :

L'équation (3) donne

$$1 + a^2 + b^2 = \frac{1}{\sin^2 V},$$

et devient, en y mettant pour $a$ et $b$ leurs valeurs tirées des équations (1) et (2)

$$1 + \left(\frac{x - x'}{z - z'}\right)^2 + \left(\frac{y - y'}{z - z'}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 V}.$$

Les mêmes substitutions étant faites dans l'équation (4), on a

$$A\left(\frac{x - x'}{z - z'}\right) + B\left(\frac{y - y'}{z - z'}\right) + C = 0,$$

ou bien en chassant les dénominateurs, et faisant passer tout dans le même membre,

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 - (z - z')\cot^2 V = 0,$$
$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0.$$

La première équation de ce résultat est visiblement celle d'un cône droit dont l'axe est vertical, dont le sommet est au point donné $x', y', z'$, et dont le rayon de la base $= (z - z')\cot V$: la seconde équation est celle d'un plan passant par le même point et coïncidant avec le plan donné. Or, l'une et l'autre équation devant s'accorder ensemble, il s'ensuit que la droite cherchée est l'intersection même du plan et du cône dont il s'agit.

Le problême que l'on considère est donc, en général, susceptible de deux solutions.

La Trigonométrie sphérique fournit une solution fort simple de ce problême, quand on connaît l'inclinaison du plan donné. En effet, soit $i$ cette inclinaison, et, comme ci-dessus, $V$ l'angle que la droite à tracer fait avec l'horison. Si, par le point donné, on mène dans le plan incliné une ligne horisontale, et que l'on désigne par $\varphi$ l'angle de ces deux droites, on trouvera aisément, par la propriété du triangle sphérique rectangle, que

$$\sin \varphi = \frac{\sin V}{\sin i}.$$

On peut voir dans le *Traité de Topographie*, pag. 246, comment on résout encore plus simplement le même problême sur le terrain.

## THÉORÈME.

145. *Si des foyers d'un ellipsoïde alongé, c'est-à-dire d'un ellipsoïde engendré par la révolution d'une ellipse autour de son grand axe, on abaisse des perpendiculaires sur le plan tangent, le produit de ces perpendiculaires sera égal au carré du demi-second axe.*

On sait, par le n°. 122, que l'équation de l'ellipsoïde alongé, est

$$a^2z^2 + a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

$2a$ étant le grand axe et $2b$ le petit axe de l'ellipse génératrice. Ainsi l'équation du plan tangent à cette

surface de révolution, est (n°. 129.)

$$a^2zz' + a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2,$$

$x$, $y$, $z$ étant les coordonnées du point de contact.

Cela posé, puisque la longueur $P$ de la perpendiculaire abaissée d'un point $x'$, $y'$, $z'$ sur un plan de l'équation $Ax' + By' + Cz' + D = 0$, est

$$P = \frac{D + Ax' + By' + Cz'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}},$$

on a

$$A = b^2x,\ B = a^2y,\ C = a^2z,\ D = -a^2b^2.$$

Mais les foyers $F$, $F'$ étant situés sur l'axe des $x$, à une distance de l'origine $= c$ et $= -c'$, il s'ensuit que $y'$ et $z'$ sont nulles pour ces points; donc, par rapport au foyer $F$, on a

$$P = \frac{b^2(cx - a^2)}{\sqrt{a^2(a^2b^2 - b^2x^2) + b^4x^2}},$$

et par rapport au foyer $F'$, on a

$$P' = \frac{-b^2(cx + a^2)}{\sqrt{a^2(a^2b^2 - b^2x^2) + b^4x^2}},$$

donc

$$P \times P' = \frac{-b^4(c^2x^2 - a^4)}{a^2(a^2b^2 - b^2x^2) + b^4x^2};$$

mais $c^2 = a^2 - b^2$ (n°. 130. *L. C.*); donc, comme le porte l'énoncé du théorême,

$$P \times P' = b^2.$$

Il est évident que l'ellipse jouit d'une propriété analogue.

## THÉORÈME.

146. *Si trois plans rectangulaires touchent constamment un même ellipsoïde ou un même hyperboloïde, le sommet de l'angle trièdre qu'ils forment est toujours sur la surface d'une sphère concentrique à cet ellipsoïde ou à cet hyperboloïde, et dont le rayon est égal à la racine carrée de la somme des carrés des trois demi-axes.*

(Ce théorème est dû à M. Monge.)

L'équation des surfaces du second degré qui ont un centre, est $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$, et les trois demi-axes sont $\sqrt{\frac{1}{A}}$, $\sqrt{\frac{1}{B}}$, $\sqrt{\frac{1}{C}}$. Si donc $x'y'z'$, $x''y''z''$, $x'''y'''z'''$ désignent les coordonnées des trois points de contact, on aura

$$\left.\begin{aligned} Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 &= 1 \\ Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 &= 1 \\ Ax'''^2 + By'''^2 + Cz'''^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

et les équations des trois plans tangens seront, n°. 129

$$\left.\begin{aligned} Axx' + Byy' + Czz' &= 1 \\ Axx'' + Byy'' + Czz'' &= 1 \\ Axx''' + Byy''' + Czz''' &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Puis pour exprimer que ces plans sont rectangulaires, on aura, n°. 110, ces relations

$$\left.\begin{aligned} A^2x'x'' + B^2y'y'' + C^2z'z'' &= 0 \\ A^2x'x''' + B^2y'y''' + C^2z'z''' &= 0 \\ A^2x''x''' + B^2y''y''' + C^2z''z''' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Or, si on fait $Ax' = a$, $Ax'' = a'$, $Ax''' = a''$; $By' = b$, $By'' = b'$, $By''' = b''$, $Cz' = c$, $Cz'' = c'$, $Cz''' = c''$; les équations (1) et (3) deviendront respectivement

$$\left.\begin{aligned} \frac{a^2}{A} + \frac{b^2}{B} + \frac{c^2}{C} &= 1 \\ \frac{a'^2}{A} + \frac{b'^2}{B} + \frac{c'^2}{C} &= 1 \\ \frac{a''^2}{A} + \frac{b''^2}{B} + \frac{c''^2}{C} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} aa' + bb' + cc' &= 0 \\ aa'' + bb'' + cc'' &= 0 \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

et si, pour abréger, on suppose que

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= R^2 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= R'^2 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= R''^2 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

On pourra conclure, d'après la théorie du n°. 116, que les relations (5) et (6) donnent lieu à celles-ci :

$$\left.\begin{aligned} \frac{ab}{R^2} + \frac{a'b'}{R'^2} + \frac{a''b''}{R''^2} &= 0 \\ \frac{ac}{R^2} + \frac{a'c'}{R'^2} + \frac{a''c''}{R''^2} &= 0 \\ \frac{bc}{R^2} + \frac{b'c'}{R'^2} + \frac{b''c''}{R'^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{a^2}{R^2} + \frac{a'^2}{R'^2} + \frac{a''^2}{R''^2} &= 1 \\ \frac{b^2}{R^2} + \frac{b'^2}{R'^2} + \frac{b''^2}{R''^2} &= 1 \\ \frac{c^2}{R^2} + \frac{c'^2}{R'^2} + \frac{c''^2}{R''^2} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Digitized by Google

Maintenant il est aisé d'obtenir une équation unique entre $x$, $y$, $z$, et indépendante des coordonnées des points de contact ; en effet, élevant au carré les équations (2) des plans tangens, après avoir divisé la première par $R$, la seconde par $R'$, la troisième par $R''$ ; et ajoutant ensuite ces carrés, on aura, en vertu des équations (7) et (8),

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}+\frac{1}{R''^2};$$

ajoutant de même les équations (4), après avoir divisé la première par $R^2$, la seconde par $R'^2$, la troisième par $R''^2$, on aura, à cause des équations (8),

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}+\frac{1}{R''^2},$$

donc

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C};$$

résultat qui renferme le théorême qu'on avait en vue de démontrer, et duquel on tire pour conséquence, que, dans le cas de l'hyperboloïde, il peut arriver qu'il n'existe qu'un point, ou qu'il n'y en ait aucun par lequel on puisse mener trois plans rectangulaires et tangens à la surface de ce corps. C'est ainsi que M. Poisson a prouvé la chose dans le n°. 7 de la *Correspondance sur l'École polytechnique.*

On démontrerait, par une méthode semblable, cet autre théorême, que *la surface engendrée par le point d'intersection de trois plans rectangulaires, dont l'un est toujours tangent à une sphère de rayon* R, *l'autre à une sphère de rayon* R', *et la troisième à une sphère*

*de rayon* $R''$, *ces sphères étant concentriques, est une quatrième sphère concentrique aux trois premières, et dont le rayon est* $\sqrt{R^2 + R'^2 + R''^2}$; mais il existe un moyen bien plus simple de s'assurer de la vérité de cette proposition.

Les surfaces du second degré sont douées de beaucoup d'autres propriétés singulièrement remarquables, sur lesquelles il serait trop long de nous arrêter, et dont quelques-unes sont encore analogues à celles des courbes de ce degré. Par exemple, M. Livet, ancien répétiteur à l'École polytechnique, a démontré, dans le 13e. cahier du Journal de cette école, 1°. que *le parallélipipède construit sur les trois axes d'une ellipsoïde est équivalent à celui que l'on construirait sur les trois diamètres conjugués*; 2°. que *la somme des carrés des diamètres conjugués est égale à la somme des carrés des trois axes.*

On trouvera, dans la section suivante, les démonstrations de deux autres théorèmes sur les surfaces dont il s'agit.

### *Des propriétés des projections stéréographique et orthographique des cercles de la sphère.*

147. Si entre un corps et l'œil on place un plan ou une surface quelconque, et que l'on conçoive des rayons visuels à divers points du corps, les intersections de ces rayons avec la surface interposée, seront les représentations ou les *projections stéréographiques* de tous ces points. Lorsque l'œil est supposé à une distance infinie du plan de projection, ou du *tableau perspectif*, les lignes projetantes sont toutes parallèles entre elles, et si en

outre, elles sont perpendiculaires à ce même tableau, la projection est dite *orthographique* : telle est celle que nous avons déja considérée. Nous nous bornerons à examiner les propriétés les plus remarquables de ces deux espèces de projections, qui servent de fondement à la construction des mappemondes, et nous renverrons, pour de plus amples détails, au *Traité de Topographie*, *etc.*

L'équation de la sphère est, en plaçant l'origine des coordonnées au centre,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 ;$$

celle du plan d'un de ses cercles, est

$$z = Ax + By + D,$$

et les projections verticales et orthographiques de la génératrice du *cône optique* sont en général

$$x - a = m(z + c), \quad y - b = n(z + c);$$

mais en supposant que les coordonnées du sommet de ce cône soient $a = 0$, $b = 0$, $-c$, on a simplement

$$x = m(z + c), \quad y = n(z + c) :$$

ainsi l'équation du plan précédent devient

$$z = Am(z + c) + Bn(z + c) + D.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de la sphère, et éliminant $m$, $n$, on a enfin

$$x^2 + y^2 + \frac{(Acx + Bcy + D.(z + c))^2}{(D + c)^2} = \frac{r^2(z + c - Ax - By)^2}{(D + c)^2}. \qquad (M)$$

Telle est l'équation de la surface conique qui a pour base un cercle quelconque de la sphère, et dont le sommet est dans l'axe des $z$, au-dessous du plan des $xy$ supposé horisontal.

Dans la projection connue sous le nom de *projection stéréographique de Ptolémée*, le point de vue est sur la surface de la sphère, à l'extrémité du rayon perpendiculaire au tableau perspectif : or, dans ce cas, $c = r$; on a donc pour équation du cône optique

$$x^2 + y^2 + \frac{(Arx + Bry + D(z+r))^2}{(D+r)^2} = \frac{r^2(z+r-Ax-By)^2}{(D+r)^2}, \qquad (M')$$

et si on fait dans celle-ci, $z = 0$, la projection stéréographique du cercle qui sert de base au cône, aura pour équation

$$x^2 + y^2 + \frac{2Ar^2x}{D+r} + \frac{2Br^2y}{D+r} = \frac{(r-D)r^2}{D+r}. \qquad (1)$$

Il résulte de là que *les projections stéréographiques des cercles de la sphère, sont elles-mêmes des cercles.*

L'équation des projections des parallèles perpendiculaires au plan $xz$ résulte de la précédente, en y faisant $B = 0$, parce qu'alors celle de la base du cône est seulement $z = Ax + D$; on a donc

$$x^2 + y^2 + \frac{2Ar^2x}{D+r} = \left(\frac{r-D}{D+r}\right)r^2. \qquad (2)$$

Quant aux grands cercles de la sphère, leur plan a pour équation, $z = Ax + By$; ainsi celle (1) devient,

à cause de $D = 0$, dans le cas actuel,

$$x^2 + y^2 - 2Arx + 2Bry = r^2. \qquad (3)$$

Si, dans cette équation, qui est celle de la projection d'un grand cercle, on fait $(x_1 - Ar) = x$, $(y_1 - Br) = y$, pour faire disparaître les premières puissances des variables, on aura

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2 + A^2 + B^2:$$

les coordonnées du centre de cette projection, sont donc $Ar$ et $Br$, ou simplement $A$ et $B$, en faisant $r$ égal à l'unité.

Lorsque l'on place le point de vue au centre de la sphère, et que l'on projette sur un plan qui lui est tangent, il faut, dans l'équation $(M)$, faire $c = 0$, et $z = r$, ce qui la réduit à

$$x^2 + y^2 + r^2 = \frac{r^2}{D^2}(r - Ax - By)^2 \qquad (4)$$

ainsi dans la *projection centrale*, les cercles de la sphère sont représentés par l'une des courbes du second ordre, excepté les grands cercles qui le sont par des droites, puisqu'alors cette dernière équation se réduit à . . . . . $r - Ax - By = 0$, à cause de $D = 0$. C'est cette projection que l'on considère en gnomonique.

Dans la projection orthographique, le point de vue étant censé à une distance infinie du tableau perspectif, on a $c = \infty$, et pour lors $(M)$ devient

$$x^2 + y^2 + (Ax + By + D)^2 = r^2; \qquad (5)$$

c'est-à-dire que les cercles de la sphère sont, en général,

représentés par des ellipses (n°. 42). Il est évident que ces dernières courbes sont les bases des surfaces cylindriques dont les cercles de la sphère dirigent le mouvement des génératrices.

148. Cherchons à présent le rapport qui existe en général entre l'angle et sa projection, de deux cercles qui se rencontrent sur la sphère.

Sur une surface courbe quelconque, l'angle formé par deux courbes planes qui se coupent, se mesure par l'angle que forment les deux tangentes menées à chacune de ces courbes au point de leur commune section. Relativement à la sphère, on peut toujours mener un plan par son centre et par l'une des tangentes dont il s'agit : alors la section circulaire qui en résulte a pour tangente celle que contient ce plan, et la perspective de cette section est touchée par la perspective de sa tangente.

Cela posé, prenons, pour plan des $xz$, celui qui passe par le centre de la sphère et par le point d'intersection des deux tangentes à sa surface, et plaçons toujours à ce centre l'origine des coordonnées rectangles.

Les équations des plans passant par les deux tangentes à la surface de la sphère et par cette origine, seront

$$\left.\begin{aligned} z &= Ax + By \\ z &= Ax + B'y \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

et l'on aura respectivement, pour les équations des projections stéréographiques des courbes circulaires résultantes des sections de ces plans,

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2Ax + 2By &= 1 \\ x^2 + y^2 + 2Ax + 2B'y &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

le rayon de la sphère étant pris pour unité, équat. (3).

Si, par le point où se coupent ces deux projections, l'on mène une tangente à chacune, l'angle de ces tangentes sera la perspective de l'angle des tangentes à la sphère. Ainsi, désignant par $\theta$ et $\theta'$ les angles que les premières tangentes font avec l'axe des $x$, on trouvera, par le n°. 129, que les équations $(b)$ donnent respectivement

$$\text{tang}\,\theta = -\frac{x+A}{y+B},$$

$$\text{tang}\,\theta' = -\frac{x+A}{y+B'}.$$

Ces rapports se réduisent nécessairement à ceux-ci :

$$\text{tang}\,\theta = -\frac{\sqrt{1+A^2}}{B}, \quad \text{tang}\,\theta' = -\frac{\sqrt{1+A^2}}{B'};$$

car, si on soustrait l'une de l'autre les équations $(b)$, on en obtiendra une nouvelle qui ne pourra être satisfaite, à moins que $y$ ne soit nulle. On a donc $y=0$, et $x = -A \pm \sqrt{1+A^2}$.

Maintenant, l'on sait qu'en général

$$\text{tang}\,(\theta-\theta') = \frac{\text{tang}\,\theta - \text{tang}\,\theta'}{1+\text{tang}\,\theta\,\text{tang}\,\theta'},$$

ainsi, pour le cas actuel,

$$\text{tang}\,(\theta-\theta') = \frac{(B-B')\sqrt{1+A^2}}{A^2+BB'+1}.$$

Telle est l'expression de la tangente de la projection de l'angle cherché; mais cet angle est aussi celui des deux plans $(a)$, puisqu'ils font un angle $V$ dont le cosinus est

(n°. 110),

$$\cos V = \frac{A^2 + BB' + 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}\,\sqrt{A^2 + B'^2 + 1}},$$

ou dont

$$\text{tang } V = \frac{(B - B')\sqrt{1 + A^2}}{A^2 + BB' + 1}.$$

Donc, *dans la projection stéréographique de Ptolémée, la perspective de l'angle de deux cercles quelconques ne diffère point de l'angle lui-même.*

Le calcul précédent aurait été plus simple si nous eussions supposé une des tangentes dans le plan $xz$; mais nous avons voulu traiter la question dans toute sa généralité.

Nous observerons qu'en appliquant la même méthode aux projections centrale et orthographique des cercles de la sphère, on parviendrait à ces deux résultats assez remarquables; savoir :

1°. Que dans la projection centrale, la tangente de l'angle de deux méridiens, dont l'un coïncide avec le plan $xz$, est à la tangente de sa projection, comme le rayon des tables est au sinus de la hauteur du pôle.

2°. Que, dans la projection orthographique, les tangentes de ces deux angles sont précisément dans un rapport inverse du précédent.

La première proportion, démontrée d'une manière très-différente dans tous les traités de gnomonique, y est énoncée ainsi : Pour le cadran horisontal, la tangente de la distance angulaire du soleil au méridien, est à la tangente de l'angle que fait la ligne horaire avec la méridienne, comme le sinus total est au sinus de la latitude du lieu.

*Analyse des principales propriétés du tétraèdre.*

149. Dans un très-beau Mémoire inséré parmi ceux de l'Académie de Berlin, année 1773, M. Lagrange, en donnant une théorie analytique de la pyramide triangulaire, s'est principalement proposé de démontrer, par la seule considération des coordonnées rectangles, que les questions qui paraissent être le plus du ressort de la géométrie, peuvent être traitées avec beaucoup de détail et de succès par le calcul algébrique : nous ne pouvons donc mieux faire que de rapporter, dans cette circonstance, quelques-unes des formules dont ce Mémoire est enrichi. Les conséquences que nous déduirons de la théorie de ce célèbre géomètre, feront voir aussi qu'en s'exerçant à bien lire dans l'analyse algébrique, on y découvre souvent un grand nombre de vérités importantes.

[Fig. 90.] Soit $AMM'M''$ un tétraèdre quelconque ayant pour base le triangle $MM'M''$, et son sommet $A$ à l'origine des coordonnées rectangles. Si on désigne par

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{matrix}\right\}$$

les coordonnées des points

$$M, \qquad M', \qquad M'',$$

et que l'on fasse

$$\left.\begin{matrix} AM = a, & AM' = a', & AM'' = a'', \\ M'M'' = c, & MM'' = c', & MM' = c'', \end{matrix}\right\} \text{(*)}$$

(*) Au moyen de cette notation, on pourrait se passer de figure, car

on aura

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= a'^2 \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 &= a''^2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} (x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2 &= c^2 \\ (x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2 &= c'^2 \\ (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2 &= c''^2 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Développant les premiers membres de ces trois dernières équations, simplifiant, à l'aide des premières, et faisant, pour abréger,

$$\left.\begin{aligned} x'x'' + y'y'' + z'z'' &= b \\ xx'' + yy'' + zz'' &= b' \\ xx' + yy' + zz' &= b'' \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

il viendra

$$\left.\begin{aligned} a'^2 + a''^2 - 2b &= c^2 \\ a^2 + a''^2 - 2b' &= c'^2 \\ a^2 + a'^2 - 2b'' &= c''^2 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

et par conséquent

$$b = \frac{a'^2+a''^2-c^2}{2}, \quad b' = \frac{a^2+a''^2-c'^2}{2}, \quad b'' = \frac{a^2+a'^2-c''^2}{2}.$$

Si on veut mettre à la place des arêtes $cc'c''$ les angles $\gamma\gamma'\gamma''$, qui leur sont opposés au sommet du tétraèdre, on aura, en vertu de la propriété du triangle scalène, n°. 27,

---

les arêtes opposées aux angles $M$, $M'$, $M''$ du triangle $MM'M''$ sont désignées par des lettres $c$ qui portent le même accent, tandis que les arêtes qui aboutissent au sommet de la pyramide sont représentées par des $a$.

$b = a'a'' \cos\gamma$, $b' = aa'' \cos\gamma'$, $b'' = aa' \cos\gamma''$.

Cherchons maintenant les aires des faces du tétraèdre, à l'aide de la formule $\frac{1}{4}\sqrt{4f^2g^2 - (f^2 + g^2 - h^2)^2}$, démontrée (n°. 64. *L. C.*), et exprimant l'aire d'un triangle rectiligne $f$, $g$, $h$. Comme le triangle $M'AM''$ a pour côtés $a'$, $a''$, $c$, son aire, réduction faite, sera

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{a'^2a''^2 - b^2}.$$

De même pour le triangle $MAM''$, dont les côtés sont $a$, $a''$, $c'$, son aire

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{a^2a''^2 - b'^2};$$

et pour le triangle $MAM'$, dont les côtés sont $a$, $a'$, $c''$, son aire

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{a^2a'^2 - b''^2}.$$

Mais afin de simplifier, l'on pourra faire

$$\left.\begin{aligned} a'^2a''^2 - b^2 &= \alpha^2 \\ a^2a''^2 - b'^2 &= \alpha'^2 \\ a^2a'^2 - b''^2 &= \alpha''^2 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

par là les aires précédentes seront respectivement représentées par $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha'}{2}$, $\frac{\alpha''}{2}$.

Il reste à considérer le triangle $MM'M''$ dont les côtés sont $c$, $c'$, $c''$. Soit $s$ son aire; on aura, par la formule ci-dessus

$$16\,s^2 = 4\,c^2c'^2 - (c^2 + c'^2 - c''^2)^2;$$

substituant pour $c$, $c'$, $c''$ leurs valeurs (4), cette expression deviendra

$$4s^2=(a^2+a''^2-2b')\,(a'^2+a''^2-2b)-(a''^2-b-b'+b'')^2.$$

Effectuant les opérations indiquées, simplifiant au moyen des formules (5), et faisant, pour abréger,

$$\left.\begin{aligned} b'b''-a^2b &= \beta \\ bb''-a'^2b' &= \beta' \\ bb'-a''^2b'' &= \beta'' \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

l'aire de la base du tétraèdre sera

$$s=\frac{\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+2\,(\beta+\beta'+\beta'')}}{2}.$$

Pour procéder actuellement à la recherche du volume $V$ du tétraèdre, il faut introduire l'expression de sa hauteur $h$, dans la formule $V=\frac{sh}{3}$. Or, on sait (n°. 109) que lorsque $P$ désigne la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point qui a pour coordonnées $x$, $y$, $z$, sur un plan dont l'équation est $Ax+By+Cz+D=0$, on a

$$P=\frac{D+Ax_1+By_1+Cz_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

mais, dans le cas actuel, $x_1=y_1=z_1=0$, puisque le sommet $A$ de la pyramide est à l'origine des axes; ainsi on a simplement

$$h=\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Le moyen de déterminer les coefficiens constans de l'équation du plan de la base $MM'M''$, d'après la condition que cette base passe par les points $MM'M''$, est d'opérer comme dans le n°. 107; mais pouvant ici faire usage des résultats qui y sont rapportés, on aura, en diminuant toutes les lettres d'un accent, pour se conformer à la notation présente

$$\begin{aligned} A &= z'y'' - y'z'' + yz'' - zy'' + zy' - yz', \\ B &= x'z'' - z'x'' + zx'' - xz'' + xz' - zx', \\ C &= y'x'' - x'y'' + xy'' - yx'' + yx' - xy', \\ D &= xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x''. \end{aligned}$$

Soit, pour simplifier,

$$\left.\begin{array}{lll} y'z''-z'y''=\xi\,, & z'x''-x'z''=\eta\,, & x'y''-y'x''=\zeta \\ zy''-yz''=\xi'\,, & xz''-zx''=\eta'\,, & yx''-xy''=\zeta' \\ yz'-zy'=\xi''\,, & zx'-xz'=\eta''\,, & xy'-yx'=\zeta'' \end{array}\right\}(7)$$

les trois premières équations ci-dessus deviendront, en vertu de celles-ci,

$$\begin{aligned} A &= -(\xi+\xi'+\xi''), \\ B &= -(\eta+\eta'+\eta''), \\ C &= -(\zeta+\zeta'+\zeta''); \end{aligned}$$

et l'on aura alors, pour la hauteur de la pyramide,

$$h = \frac{D}{\sqrt{(\xi+\xi'+\xi'')^2+(\eta+\eta'+\eta'')^2+(\zeta+\zeta'+\zeta'')^2}};$$

expression qui acquerra une nouvelle forme, à l'aide de la considération suivante :

Il est remarquable qu'il existe entre $\xi\ldots\ \mu\ldots\ \zeta\ldots$ et $\alpha\ldots\ \beta\ldots$

les mêmes relations qu'entre $x\ldots\ y\ldots\ z\ldots$ et $a\ldots\ b\ldots$ fournies par les équations (1) et (3). En effet, si on élève à la seconde puissance chacune des équations (7), et qu'ensuite on ajoute 3 à 3 les premières, les secondes et les troisièmes équations de chaque ligne, on obtiendra, avec un peu d'attention et à l'aide des équations (1), (3) et (5),

$$\left.\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= \alpha^2 \\ \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 &= \alpha'^2 \\ \xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 &= \alpha''^2 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Ces mêmes équations (7) offrent aussi, par une autre combinaison, ces relations

$$\left.\begin{aligned} \xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' &= \beta \\ \xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta'' &= \beta' \\ \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' &= \beta'' \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

que l'on peut d'ailleurs vérifier en rendant toutes les quantités $\xi$, $\xi'\ldots$, fonctions de $x$, $x'\ldots$

Cela posé, en développant les termes qui sont sous le signe radical de la valeur de $h$ obtenue plus haut, et en faisant les substitutions auxquelles les équations (8) et (9) donnent lieu naturellement, on aura

$$h = \frac{D}{\sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + 2(\beta + \beta' + \beta'')}}.$$

Il suit de là et de la valeur de $s$, trouvée précédemment, que

$$V = \frac{sh}{3} = \frac{D}{6}.$$

La quantité $D$ est donc le sextuple du volume du tétraèdre

proposé; et comme elle n'est composée que des coordonnées des sommets des angles du triangle $MM'M''$, on est en droit de conclure que la valeur de $V$ exprime généralement le volume de tous les tétraèdres qui ont leur sommet à l'origine des axes. Voici, maintenant, comment M. Lagrange change la quantité $D$, en une autre qui ne dépende que des côtés de la pyramide.

Il est évident qu'en combinant entre elles les équations (8) et (9), de manière à former des équations analogues à celles (5) et (6), les résultats de ces combinaisons pourront être représentés par $A^2$, $A'^2$, $A''^2$ et $B$, $B'$, $B''$; on aura donc

$$\left.\begin{aligned} \alpha'^2\alpha''^2 - \beta^2 &= A^2 \\ \alpha^2\alpha''^2 - \beta'^2 &= A'^2 \\ \alpha^2\alpha'^2 - \beta''^2 &= A''^2 \end{aligned}\right\} (5') \qquad \left.\begin{aligned} \beta'\beta'' - \alpha^2\beta &= B \\ \beta\beta'' - \alpha'^2\beta' &= B' \\ \beta\beta' - \alpha''^2\beta'' &= B'' \end{aligned}\right\} (6')$$

et comme des relations (7) on est arrivé à celles qui sont désignées par (8) et (9), il s'ensuit que des équations

$$\left.\begin{aligned} \eta'\zeta'' - \zeta'\eta'' &= X, \quad \zeta'\xi'' - \xi'\zeta'' = Y, \quad \xi'\eta'' - \eta'\xi'' = Z \\ \zeta\eta'' - \eta\zeta'' &= X', \quad \xi\zeta'' - \zeta\xi'' = Y', \quad \eta\xi'' - \xi\eta'' = Z' \\ \zeta\eta' - \eta\zeta' &= X'', \quad \zeta\xi' - \xi'\zeta = Y'', \quad \xi\eta' - \eta\xi' = Z'' \end{aligned}\right\} (7')$$

on parviendrait de même aux suivantes,

$$\left.\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 &= A^2 \\ X'^2 + Y'^2 + Z'^2 &= A'^2 \\ X''^2 + Y''^2 + Z''^2 &= A''^2 \end{aligned}\right\} \qquad (8')$$

$$\left.\begin{aligned} X'X'' + Y'Y'' + Z'Z'' &= B \\ XX'' + YY'' + ZZ'' &= B' \\ XX' + YY' + ZZ' &= B'' \end{aligned}\right\} \qquad (9')$$

Or, si au moyen des relations (7) on élimine des équations (7′) les quantités qui composent leurs premiers membres, on aura, à cause de . . . . . .

$$D = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x''$$

$$\begin{aligned} X &= Dx\,, & Y &= Dy\,, & Z &= Dz\,,\\ X' &= Dx'\,, & Y' &= Dy'\,, & Z' &= Dz'\,,\\ X'' &= Dx''\,, & Y'' &= Dy''\,, & Z'' &= Dz''\,. \end{aligned}$$

Ces valeurs étant substituées dans les formules (8′) et (9′), il viendra, en vertu de celles (1) et (3),

$$\begin{aligned} A^2 &= D^2a^2\,, & B &= D^2b\,,\\ A'^2 &= D^2a'^2\,, & B' &= D^2b'\,,\\ A''^2 &= D^2a''^2\,, & B'' &= D^2b''\,. \end{aligned}$$

Chacune de ces équations peut fournir la valeur de $D^2$; la première, par exemple, donne $D^2 = \frac{A^2}{a^2} = \frac{\alpha'^2\alpha''^2 - \beta^2}{a^2}$; et substituant, pour $\alpha'^2$, $\alpha''^2$, $\beta$, leurs valeurs (5) et (6), on aura

$$D^2 = a^2a'^2a''^2 + 2bb'b'' - a^2b^2 - a'^2b'^2 - a''^2b''^2\,;$$

donc le volume de la pyramide triangulaire, ou $\frac{D}{6}$, pourra encore être exprimé par la formule

$$V = \frac{\sqrt{(a^2a'^2a''^2 + 2bb'b'' - a^2b^2 - a'^2b'^2 - a''^2b''^2)}}{6}.$$

Rien ne serait plus aisé maintenant que de la rendre entièrement fonction des côtés, puisqu'on peut remplacer $b$, $b'$, $b''$ par leurs valeurs (4); et si on voulait qu'elle ne dépendît que des arêtes $a$, $a'$, $a''$, il faudrait y substituer

les valeurs de $b$, $b'$, $b''$ données en fonctions des angles $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$ : cette dernière opération étant faite, on aura

$$V=\frac{1}{6}aa'a''\sqrt{1-\cos^2\gamma-\cos^2\gamma'-\cos^2\gamma''+2\cos\gamma\cos\gamma'\cos\gamma''},$$

La quantité qui est sous le radical de cette valeur résulte du produit des deux facteurs . . . . . sin $\gamma$ sin $\gamma''$ + cos $\gamma'$ — cos $\gamma$ cos $\gamma''$, et. . . . . sin $\gamma$ sin $\gamma''$ — cos $\gamma'$ + cos $\gamma$ cos $\gamma''$ ; mais le premier $= \cos\gamma' - \cos(\gamma+\gamma'') = 2\sin\left(\frac{\gamma+\gamma'+\gamma''}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma+\gamma''-\gamma'}{2}\right)$, et le second $= \cos(\gamma-\gamma'') - \cos\gamma' = 2\sin\left(\frac{\gamma+\gamma'-\gamma''}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma'+\gamma''-\gamma}{2}\right)$, donc, le volume cherché, en faisant $\Sigma=\frac{\gamma+\gamma'+\gamma''}{2}$, sera exprimé plus symétriquement par la formule

$$V=\frac{1}{3}aa'a''\sqrt{[\sin\Sigma\sin(\Sigma-\gamma)\sin(\Sigma-\gamma')\sin(\Sigma-\gamma'')]}.$$

D'un autre côté, il est évident qu'une pyramide triangulaire est le sixième d'un parallélipipède compris sous les trois arêtes contigues de cette pyramide ; donc, le volume d'un parallélipipède, toutes choses égales d'ailleurs comme dans le tétraèdre, a pour expression

$$U=aa'a''R,$$

$R$ désignant le facteur irrationnel de la seconde expression de $V$.

On peut parvenir à cette dernière formule par une analyse beaucoup moins longue, et sans employer néanmoins d'autre considération que celle des coordonnées

rectangles. Pour le faire voir, supposons que le plan des $xy$ soit une des faces du parallélipipède, de la face $M'AM''$, par exemple, de manière que l'arête $a''$ coïncide en même tems avec l'axe des $x$, ce qui ne peut manquer d'abréger les calculs; on aura nécessairement $z' = z'' = 0$, et $z$ sera la hauteur du parallélipipède. Or, l'aire de sa base étant $a'a'' \sin \gamma$, son volume $U$ sera

$$U = a'a''z \sin \gamma.$$

Reste donc à trouver $z$ en fonction des données. Pour cela, reprenons la relation $xx' + yy' + zz' = aa' \cos \gamma''$ trouvée précédemment, laquelle se réduit à

$$xx' + yy' = aa' \cos \gamma'',$$

à cause de $z' = 0$, et nous en tirerons

$$y = \frac{aa' \cos \gamma'' - xx'}{y'};$$

mais il est aisé de s'assurer que $x = a \cos \gamma'$, $x' = a' \cos \gamma$, $y' = a' \sin \gamma$; donc

$$y = \frac{a(\cos \gamma'' - \cos \gamma \cos \gamma')}{\sin \gamma}.$$

D'un autre côté, si, du point $M$, on abaisse une perpendiculaire $E$ sur l'axe des $x$, ou, ce qui revient au même, sur $a''$, l'expression de cette perpendiculaire sera

$$E = a \sin \gamma';$$

et à cause de $z = \sqrt{E^2 - y^2}$, on aura

$$z = \frac{a}{\sin \gamma} \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 \gamma' - (\cos \gamma'' - \cos \gamma \cos \gamma')^2};$$

donc le volume du parallélipipède est comme ci-dessus

$$U = za'a'' \sin\gamma = aa'a''R.$$

150. On a donné ci-dessus une manière de décomposer $R$ en facteurs; voici encore sous quelles formes cette expression peut être mise.

En prenant le triangle $MAM'$ pour base du tétraèdre $AMM'M''$, le volume de ce corps sera

$$V = \frac{aa'}{2} \sin(a, a') \frac{q}{3},$$

$q$ désignant la hauteur de la pyramide, et $(a, a')$ l'angle $\gamma''$. Or, il est aisé de se convaincre que si $h$ exprime toujours la perpendiculaire abaissée du point $A$ sur le plan du triangle $MM'M''$, on a

$$a = \frac{h}{\cos(h, a)}, \quad a' = \frac{h}{\cos(h, a')}, \quad a'' = \frac{h}{\cos(h, a'')},$$

$$q = a'' \sin(aa', a'');$$

$(aa', a'')$ dénotant l'angle que l'arête $a''$ fait avec le plan $aa'$.

Il suit de là que la valeur précédente de $V$ devient

$$V = \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\sin(a, a') \sin(aa', a'')}{\cos(h, a) \cos(h, a') \cos(h, a'')}; \quad (m)$$

par la même raison

$$V = \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\sin(a, a'') \sin(aa'', a')}{\cos(h, a) \cos(h, a') \cos(h, a'')}$$

$$= \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\sin(a', a'') \sin(a'a'', a)}{\cos(h, a) \cos(h, a') \cos(h, a'')};$$

et comme les facteurs $\sin(a, a')\sin(aa', a'')$, etc., restent constans, quelle que soit la grandeur des arêtes $a$, $a'$, $a''$, ou celle de la perpendiculaire $h$, on doit en conclure que l'on a, en comparant ces dernières valeurs de $V$ avec la première de la page 351,

$$R = \sin(a, a')\sin(aa', a'') = \sin(a, a'')\sin(a\,a'', a') = \sin(a', a'')\sin(a'a'', a);$$

or, $(a, a')$ et $(aa'', a')$ étant respectivement l'hypoténuse et le côté de l'angle droit d'un triangle sphérique rectangle, il est clair que

$$\frac{\sin(aa'', a')}{\sin(a, a')} = \sin(aa'', aa');$$

donc

$$\sin(aa', a'') = \sin(a, a'')\sin(aa'', aa'),$$
$$\sin(aa'', a') = \sin(a, a')\sin(aa', aa''),$$
$$\sin(a'a'', a) = \sin(a', a)\sin(a'a, a'a'').$$

On pourrait trouver d'autres expressions de $R$, non moins symétriques que les précédentes, mais un peu plus compliquées : par exemple, on sait, par le théorême du n°. 100, que le carré de la base du tétraèdre, c'est-à-dire

$$s^2 = \frac{a^2a'^2}{4}\sin^2(a,a') + \frac{a^2a''^2}{4}\sin^2(a,a'') + \frac{a'^2a''^2}{4}\sin^2(a',a'')$$
$$- 2\frac{a\,a'\,.\,aa''}{4}\sin(a, a')\sin(a, a'')\cos(aa', aa''),$$
$$- 2\frac{aa'\,.\,a'a''}{4}\sin(a, a')\sin(a', a'')\cos(aa', a'a''),$$
$$- 2\frac{aa''\,.\,a'a''}{4}\sin(a, a'')\sin(a', a'')\cos(aa'', a'a'');$$

et si on multiplie cette équation par $\frac{h^2}{9}$, qu'on égale le produit résultant à la valeur de $V^2$ déduite de l'équation $(m)$ précédente, et que l'on fasse

$$\cos(h,a)=A,\quad \cos(h,a')=A',\quad \cos(h,a'')=A'',$$

on obtiendra sans peine cette relation

$$R^2=\begin{cases} A^2\sin^2(a',a'')+A'^2\sin^2(a,a'')+A''^2\sin^2(a,a') \\ \quad -2AA'\sin(a,a'')\sin(a',a'')\cos(aa'',a'a'') \\ \quad -2AA''\sin(a,a')\sin(a',a'')\cos(aa',a'a'') \\ \quad -2A'A''\sin(a,a')\sin(a,a'')\cos(aa',aa'') \end{cases}$$

C'est à ce résultat même que M. Lefrançais est parvenu, mais par une marche toute différente de la nôtre, comme on peut le voir dans son intéressant Mémoire cité au n°. 113.

151. Actuellement soient $pqr$ les coordonnées d'un point $P$ placé où l'on voudra, au dedans ou au dehors de la pyramide, et désignons respectivement par $f, g, g', g''$, les distances $AP$, $PM$, $PM'$, $PM''$; on aura évidemment

$$\left.\begin{array}{r} p^2+q^2+r^2=f^2 \\ (p-x)^2+(q-y)^2+(r-z)^2=g^2 \\ (p-x')^2+(q-y')^2+(r-z')^2=g'^2 \\ (p-x'')^2+(q-y'')^2+(r-z'')^2=g''^2 \end{array}\right\} \quad (A)$$

Développant ces trois dernières équations, réduisant à l'aide de la première et de celle (1), puis faisant, pour abréger,

$$k=\frac{a^2+f^2-g^2}{2},\quad k'=\frac{a'^2+f^2-g'^2}{2},\quad k''=\frac{a''^2+f^2-g''^2}{2},$$

il viendra

$$\begin{aligned} px + qy + rz &= k, \\ px' + qy' + rz' &= k', \\ px'' + qy'' + rz'' &= k''; \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en ayant égard aux relations (7) et à la valeur de $D$,

$$p = \frac{k\xi + k'\xi' + k''\xi''}{D},$$

$$q = \frac{k\eta + k'\eta' + k''\eta''}{D},$$

$$r = \frac{k\zeta + k'\zeta' + k''\zeta''}{D}.$$

Ces valeurs étant introduites dans la première équation $(A)$, l'on aura

$$D^2 f^2 = \alpha^2 k^2 + \alpha'^2 k'^2 + \alpha''^2 k''^2 + 2(\beta'' k k' + \beta' k k'' + \beta k' k''),$$

en recourant toutefois, pour simplifier, aux formules (8) et (9).

Il suit de là que l'on peut résoudre le problème suivant : *étant données les neuf arêtes d'un polyèdre composé de deux tétraèdres adossés l'un à l'autre, trouver la valeur de la diagonale qui joint les deux angles trièdres de ce solide.*

Si, dans l'équation précédente, on remplaçait $k$, $k'$, $k''$, par leurs valeurs, et qu'on ordonnât les termes par rapport à $f$, cette équation monterait au quatrième degré; mais elle serait réductible au second, et donnerait par conséquent deux racines réelles pour $f^2$; parce qu'en effet le problème admet deux solutions, comme il est facile de s'en convaincre en considérant que le polyèdre proposé peut être concave ou convexe. La plus petite valeur des

deux de $f^2$ appartiendrait au premier cas, et la plus grande appartiendrait au second.

Supposons dans le tétraèdre ci-dessus, $f=g=g'=g''$; le point $P$ sera le centre de la sphère circonscrite, et pour lors $k=\frac{a^2}{2}$, $k'=\frac{a'^2}{2}$, $k''=\frac{a''^2}{2}$ : partant, l'équation précédente devient

$$4D^2f^2=a^2a^4+a'^2a'^4+a''^2a''^4+2(\beta''a^2a'^2+\beta'a^2a''^2+\beta a'^2a''^2);$$

on a donc, pour l'expression du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre $AMM'M''$,

$$f=\frac{\sqrt{a^2a^4+a'^2a'^4+a''^2a''^4+2(\beta''a^2a'^2+\beta'a^2a''^2+\beta a'^2a''^2)}}{2D},$$

et en y introduisant les angles $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$, on obtiendra, avec un peu d'attention,

$$f=\tfrac{1}{2}\left[\frac{\begin{matrix}a^2\sin^2\gamma & +a'^2\sin^2\gamma' & +a''^2\sin^2\gamma''\\ -2aa'(\cos\gamma''-\cos\gamma\cos\gamma') & -2aa''(\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\gamma'') & -2a'a''(\cos\gamma-\cos\gamma'\cos\gamma'')\end{matrix}}{1-\cos^2\gamma-\cos^2\gamma'-\cos^2\gamma''+2\cos\gamma\cos\gamma'\cos\gamma''}\right];$$

c'est à quoi M. Legendre est parvenu immédiatement par les principes de la trigonométrie sphérique, note V de sa *Géométrie*.

Si on remontait aux valeurs générales des coordonnées $p$, $q$, $r$ du point $P$ trouvées plus haut; on aurait, dans la supposition que ce point est le centre de la sphère circonscrite,

$$\left.\begin{aligned}p&=\frac{a^2\xi+a'^2\xi'+a''^2\xi''}{2D}\\ q&=\frac{a^2\eta+a'^2\eta'+a''^2\eta''}{2D}\\ r&=\frac{a^2\zeta+a'^2\zeta'+a''^2\zeta''}{2D}\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

M. Lagrange fait subir à ces valeurs, des transformations qui reposent sur des considérations analytiques très-remarquables; mais on ne peut se dissimuler que la position du centre de la sphère circonscrite ne soit assez pénible à déterminer graphiquement par cette voie. Pour obvier à cet inconvénient, nous modifierons, sur ce point, les calculs de cet illustre géomètre, sans nuire néanmoins à l'élégance de sa méthode, et de manière à faire voir que les résultats de l'analyse s'accordent avec ceux que l'on peut déduire de la seule géométrie.

Reprenons, pour cet effet, les équations (*A*) dans lesquelles nous ferons $f = g = g' = g''$; nous aurons ce nouveau système

$$\left.\begin{aligned} p^2 + q^2 + r^2 &= f^2 \\ (p - x)^2 + (q - y)^2 + (r - z)^2 &= f^2 \\ (p - x')^2 + (q - y')^2 + (r - z')^2 &= f^2 \\ (p - x'')^2 + (q - y'')^2 + (r - z'')^2 &= f^2 \end{aligned}\right\} (B)$$

Développant toutes les puissances indiquées, et, de la première équation, soustrayant successivement la seconde, la troisième et la quatrième, on n'aura plus que les trois inconnues $p, q, r$, dont les valeurs seront données par les équations

$$\begin{aligned} 2px + 2qy + 2rz - x^2 - y^2 - z^2 &= 0, \\ 2px' + 2qy' + 2rz' - x'^2 - y'^2 - z'^2 &= 0, \\ 2px'' + 2qy'' + 2rz'' - x''^2 - y''^2 - z''^2 &= 0. \end{aligned}$$

Au lieu de simplifier celles-ci, comme nous l'avons fait précédemment, et de procéder à l'élimination, nous considérerons chacune de ces équations comme celle d'un plan dont les coordonnées de ses points sont $pqr$. Ces

coordonnées devant être les mêmes dans les trois plans au point de leur commune section, c'est-à-dire au sommet de l'angle trièdre qu'ils forment entre eux, il s'ensuit que le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre proposé sera le sommet de cet angle.

En donnant aux équations précédentes la forme

$$\left.\begin{aligned} x\left(p-\frac{x}{2}\right)+y\left(q-\frac{y}{2}\right)+z\left(r-\frac{z}{2}\right)&=0\\ x'\left(p-\frac{x'}{2}\right)+y'\left(q-\frac{y'}{2}\right)+z'\left(r-\frac{z'}{2}\right)&=0\\ x''\left(p-\frac{x''}{2}\right)+y''\left(q-\frac{y''}{2}\right)+z''\left(r-\frac{z''}{2}\right)&=0 \end{aligned}\right\} \quad (C)$$

on voit que la première équation, par exemple, est celle d'un plan assujéti à passer par un point dont les coordonnées sont $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$, $\frac{z}{2}$; point qui est visiblement le milieu de la corde $AM$ de la sphère. Ainsi les plans dans lesquels est situé le centre cherché, passent par les milieux des arêtes du tétraèdre inscrit.

Il reste maintenant à connaître la position que ces plans doivent avoir à l'égard des cordes qu'ils coupent; or, les équations des projections verticales de la droite $AM$ passant par l'origine, sont

$$\left.\begin{aligned} p&=\frac{y}{z}r\\ q&=\frac{x}{z}r \end{aligned}\right\} \quad (D)$$

en regardant $p$, $q$, $r$ comme les coordonnées d'un point

quelconque de cette droite, et $r$ comme la coordonnée verticale.

De plus, le plan qui passe par le milieu de $AM$ ayant pour équation la première du système $(C)$, ses traces sur chacun des plans coordonnés sont

$$\left.\begin{aligned} p-\frac{x^2+y^2}{2x}&=-\frac{z}{x}\left(r-\frac{z}{2}\right)\\ q-\frac{x^2+y^2}{2y}&=-\frac{z}{y}\left(r-\frac{z}{2}\right)\end{aligned}\right\}\quad (E)$$

De la comparaison de celles-ci avec les équations $(D)$ on conclut que les deux traces du plan sont respectivement perpendiculaires aux deux projections de la droite $AM$, n°. 109. Donc le plan est perpendiculaire à la droite; donc enfin, le centre de la sphère passant par quatre points donnés, est à l'intersection même des plans menés perpendiculairement aux milieux des trois droites qui joignent ces points.

Il est facile de voir que les deux premières équations $(C)$ peuvent être mises sous la forme

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{z}\left(p-\frac{x}{2}\right)+\frac{y}{z}\left(q-\frac{y}{2}\right)+\left(r-\frac{z}{2}\right)&=0\\ \frac{x'}{z'}\left(p-\frac{x'}{2}\right)+\frac{y'}{z'}\left(q-\frac{y'}{2}\right)+\left(r-\frac{z'}{2}\right)&=0\end{aligned}\right\}\quad (F)$$

Or, si on avait à la fois les relations $\frac{x}{z}=\frac{x'}{z'}$, $\frac{y}{z}=\frac{y'}{z'}$, elles exprimeraient non-seulement que les plans auxquels appartiennent les équations précédentes

sont parallèles entre eux (n°. 108), mais encore, elles indiqueraient que les points $A$, $M$, $M'$ sont en ligne droite. Il suit de là qu'il est impossible, dans l'hypothèse actuelle, de faire passer une sphère par les quatre points donnés, puisque son centre ne peut être dans deux plans différens sans se trouver sur leur intersection. Mais ce problème admettrait une infinité de solutions si les quatre points étaient situés sur une même circonférence, parce qu'alors les plans menés perpendiculairement aux milieux de deux cordes quelconques de ce cercle, se couperaient tous deux à deux, suivant une seule et même droite.

152. Rapprochons-nous maintenant de la méthode de M. Lagrange, et, pour cela, supposons que le point $P$ n'est plus le centre de la sphère circonscrite. Pour avoir la plus courte distance $\pi$ de ce point à la base $MM'M''$ du tétraèdre, nous emploierons encore la formule du n°. 109, savoir

$$P = \frac{D + Ap + Bq + Cr}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

et en y substituant, pour $A$, $B$, $C$, $D$, leurs valeurs calculées précédemment, on aura, en se conformant à la présente notation,

$$\pi = \frac{D - (\xi + \xi' + \xi'')p - (\eta + \eta' + \eta'')q - (\zeta + \zeta' + \zeta'')r}{\sqrt{(\xi + \xi' + \xi'')^2 + (\eta + \eta' + \eta'')^2 + (\zeta + \zeta' + \zeta'')^2}},$$

ou bien,

$$\pi = \frac{D - (\xi + \xi' + \xi'')p - (\eta + \eta' + \eta'')q - (\zeta + \zeta' + \zeta'')r}{\sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + 2(\beta + \beta' + \beta'')}}.$$

On peut modifier les valeurs de $A$, $B$, $C$, $D$, de manière à ce qu'elles conviennent aux faces latérales de la pyramide. Pour cet effet, il suffit de supposer que le plan $MM'M''$ coïncide successivement avec les faces $AM'M''$, $AMM''$, $AMM'$; et c'est ce qui aura lieu, si on fait d'abord $x = y = z = 0$, puis $x' = y' = z' = 0$, ensuite $x'' = y'' = z'' = 0$; et, pour les trois cas, $D = 0$, puisque les faces dont il est question passent par l'origine.

Soient donc $\rho$, $\rho'$, $\rho''$ les perpendiculaires abaissées respectivement du point $P$ sur ces faces. Si on fait attention que ces perpendiculaires sont négatives par rapport à $\pi$ (n°. 109), on aura

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \frac{\xi p + \eta q + \zeta r}{\alpha} \\ \rho' &= \frac{\xi' p + \eta' q + \zeta' r}{\alpha'} \\ \rho'' &= \frac{\xi'' p + \eta'' q + \zeta'' r}{\alpha''} \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

et si, de l'équation $\pi$, on tire la valeur de $D$, on obtiendra, en vertu des équations précédentes,

$$D = \pi \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + 2(\beta + \beta' + \beta'')} + p\alpha + p\alpha' + p\alpha'';$$

formule qu'il est aisé de vérifier, car le tétraèdre . . . $AMM'M''$ peut être considéré comme l'assemblage de quatre tétraèdres partiels qui auraient pour bases les faces du premier, et pour sommet commun le point $P$.

Lorsque toutes les arêtes du tétraèdre proposé sont égales, on a $b = b' = b'' = \frac{a^2}{2}$, et par suite. . .

$a^2 = a'^2 = a''^2 = \frac{3}{4}a^2$; $\beta = \beta' = \beta'' = -\frac{a^2}{4}$; donc

$\beta = -\frac{a^2}{3}$; donc

$$D = (\pi + \rho + \rho' + \rho'')\,a.$$

Concluons de là que *si d'un point quelconque pris dans l'intérieur d'un tétraèdre régulier, on abaisse une perpendiculaire sur chaque face, la somme de ces trois lignes sera toujours constante.* On conçoit bien que cette propriété est commune à tous les polyèdres dont les faces sont équivalentes.

En prenant le point $P$ pour le centre de la sphère inscrite, on aura $\pi = \rho = \rho' = \rho''$; et si, pour abréger, on fait $\omega = \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + 2(\beta + \beta' + \beta''))}$, la formule précédente donnera

$$\pi = \frac{D}{\omega + a + a' + a''},$$

c'est-à-dire, pour plus de simplicité,

$$\pi = \frac{3V}{S};$$

$V$ désignant le volume, et $S$ la surface de la pyramide. Telle est l'expression du rayon de la sphère inscrite. Nous ne nous arrêterons pas au calcul des coordonnées de son centre, parce que leurs valeurs peuvent se déduire sans difficulté des équations (11). D'ailleurs on doit naturellement inférer de la méthode du n°. 130, que le centre de la sphère inscrite est situé dans des plans qui divisent en deux parties égales les angles dièdres de

la pyramide : propriété analogue à celle du triangle rectiligne. Nous engageons ceux qui désirent de connaître d'autres propriétés du tétraèdre, à lire le Mémoire cité de M. Lagrange, et la *Théorie des transversales*, par M. Carnot. Ils trouveront aussi sur ce sujet, un article fort intéressant de M. Monge, dans le n°. 10 de la *Correspondance sur l'Ecole polytechnique*. Voici deux des propositions nouvelles qui s'y trouvent énoncées :

1°. *Si on prolonge indéfiniment les six arêtes d'une pyramide triangulaire quelconque, on pourra inscrire entre ces six droites celle des surfaces du second degré que l'on voudra.*

2°. *En supposant toujours six arêtes de cette pyramide prolongées indéfiniment de part et d'autre, si l'on en considère quatre quelconques opposées entre elles deux à deux, il existe toujours un plan qui en se mouvant parallèlement à lui-même, les coupe toutes quatre dans des points qui sont toujours sur la circonférence d'un cercle.*

Le 1^er^. numéro du second volume de cette Correspondance, que j'ai déja cité, mais dont je viens seulement de prendre connaissance, renferme sur le même sujet d'autres recherches très-curieuses de ce grand géomètre. On y trouvera en outre les démonstrations des formules de la page 255. M. Poisson a pris, comme moi, pour base de ces démonstrations, un des principes de trigonométrie sphérique.

# QUATRIÈME SECTION.

## NOTIONS SUR L'APPLICATION DE L'ANALYSE TRANSCENDANTE A LA GÉOMÉTRIE.

## CHAPITRE PREMIER.

### *Théorie générale des osculations.*

#### *Osculation des courbes planes.*

153. Il ne s'est agi, dans le n°. 129, que des droites tangentes aux courbes planes, c'est-à-dire que des sécantes dont les deux points d'intersection coïncident. Ce n'est pas, néanmoins, la seule manière d'envisager les tangentes : en effet, on peut les regarder comme le prolongement de l'élément de la courbe ; ou, plus exactement, une droite est tangente à une courbe, lorsque, entre elle et cette courbe, il est impossible de mener, par le point commun, aucune autre droite. Par analogie, les géomètres ont comparé les courbes entre elles, et cherché à connaître les conditions analytiques auxquelles il fallait satisfaire pour qu'une courbe d'une espèce donnée

s'approchât, dans un petit espace, le plus possible d'une autre courbe quelconque : ils ont même appliqué ces considérations aux surfaces courbes.

Afin de présenter la théorie des osculations sous le point de vue le plus général, et de suppléer par là à ce qui manque dans tous les livres élémentaires qui traitent du calcul différentiel, je vais donner le précis de celle que M. Lagrange a exposée d'une manière élégante et lumineuse dans sa *Théorie des fonctions analytiques* : ensuite j'en ferai, d'après M. Monge, l'application à la recherche des équations de certaines surfaces courbes. Je supposerai donc ici que le lecteur est imbu des principes du calcul différentiel.

Suivant le *Théorême de Taylor* (Voy. le *Cal. différent. élém.* de Lacroix.), si $y$ est une fonction de $x$, ou, ce qui est de même, si l'équation d'une courbe quelconque est représentée par $y = f(x)$, et que l'abscisse $x$ reçoive un accroissement quelconque $h$, l'ordonnée $y$ variera en même tems d'une quantité $k$, dont la valeur sera donnée par la série

$$k = \frac{df(x)}{dx}h + \frac{d^2f(x)}{1.2.dx^2}h^2 + \frac{d^3f(x)}{1.2.3.dx^3}h^3 + \text{etc.}$$

$$= \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{1.2.dx^2}h^2 + \frac{d^3y}{1.2.3.dx^3}h^3 + \ldots\ldots$$

et dans laquelle nous supposerons qu'aucun terme ne devienne infini. Mais en désignant, pour abréger, les coefficiens différentiels successifs, par $p'$, $p''$, $p'''$, on a

$$k = p'h + \frac{p''}{1.2}h^2 + \frac{p'''}{1.2.3}h^3 + \ldots\ldots$$

Soit une autre courbe donnée par l'équation $y' = F(x')$. Si $x'$ reçoit le même accroissement $h$, $y'$ deviendra en général $y' + k'$; ainsi, on aura

$$k' = q'h + \frac{q''}{1.2}h^2 + \frac{q'''}{1.2.3}h^3 + \ldots\ldots$$

Maintenant la condition d'un point commun aux deux courbes, donne $y' = y$, ou $F(x) = f(x)$, puisqu'alors $x' = x$; et la distance $\Delta$ de ces deux lignes, mesurée sur l'ordonnée qui répond à l'abscisse $x + h$ est, en général,

$$\Delta = (p' - q')h + \frac{(p'' - q'')}{1.2}h^2 + \frac{(p''' - q''')}{1.2.3}h^3 + \ldots\ldots$$

Cette distance deviendra évidemment d'autant plus petite qu'il y aura plus de termes qui disparaîtront à l'origine de la série.

Considérons une troisième courbe dont l'équation soit $y'' = \varphi(x'')$, et qui passe par le point commun aux deux autres, auquel cas $y'' = y$. Alors, si $D$ exprime la distance de celle-ci à la première, mesurée de même sur l'ordonnée répondante à l'abscisse $x + h$, on aura, comme ci-dessus,

$$D = (p' - r')h + \frac{(p'' - r'')}{1.2}h^2 + \ldots\ldots$$

et si, dans la valeur générale de $\Delta$, $p' - q' = 0$, on aura seulement

$$\Delta = (p'' - q'')\frac{h^2}{1.2} + (p''' - q''')\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

Or, le rapport $\frac{\Delta}{D}$ devenant d'autant plus petit que $h$ est moindre, il arrivera que, pour de certaines valeurs très-petites de $h$, on aura $\Delta < D$; donc, tant que cette inégalité subsiste, c'est-à-dire tant que l'on n'a pas $p' - r' = 0$, la troisième courbe ne peut passer entre les deux premières. Celles-ci se touchent donc au point commun. Le contact qui a lieu lorsque $F(x) = f(x)$, et $\frac{dF(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$, est dit *contact simple*, ou *du premier ordre*.

Quand les deux premiers termes de la série générale $\Delta$ disparaissent, sans que $h$ soit nul, on a

$$\Delta = \frac{h^3}{1.2.3}(p''' - q''') + \ldots\ldots$$

ainsi, par rapport à la troisième courbe, pour laquelle les deux premiers termes ne disparaissent pas de la série $D$, il s'ensuit de même que $\Delta < D$, pour des valeurs très-petites de $h$. Cette troisième courbe ne peut donc passer entre les deux autres, dans le cas où l'on a à la fois $y' = y$, $q' = p'$, $q'' = p''$, ou $F(x) = f(x)$, $\frac{dF(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d^2F(x)}{dx^2} = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$. Dans cette circonstance, les deux premières courbes forment un *contact du second ordre*, et il est remarquable alors que la courbe touchante ou *osculatrice* passe au-dessus et au-dessous de la courbe touchée : cela est une suite de ce que $h^3$ change de signe lorsqu'on met $-h$ au lieu de $+h$, (n°. 97. *Calc. dif. élém. L. C.*)

En général, pour que deux courbes soient rapprochées

l'une de l'autre, auprès de leur point commun, de manière à former un contact de l'ordre $n$, il faut égaler entre eux les $n$ premiers termes des valeurs de $k$ et $k'$.

154. Pour répandre plus de jour sur cette doctrine, passons aux applications.

D'abord, soit $y' = F(x') = Ax' + B$ l'équation de la droite touchante, dont la position sera déterminée par les deux constantes $A$, $B$. Comme au point de contact, on a, d'après ce qui précède,

$$y' = y, \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx},$$

il s'ensuit que l'équation de cette droite donne, en la différenciant,

$$\frac{dy'}{dx'} = A, \quad \text{donc } A = \frac{dy}{dx};$$

par conséquent les deux relations qui existent entre $A$ et $B$ sont

$$y = Ax + B, \quad A = \frac{dy}{dx},$$

et fournissent

$$B = y - \frac{dy}{dx}\, x.$$

Ainsi, l'équation de la tangente à une courbe quelconque, est

$$y' - y = \frac{dy}{dx}\,(x' - x);$$

et puisque la normale est perpendiculaire à la tangente,

on a, pour son équation,

$$y' - y = -\frac{dx}{dy}(x' - x).$$

Le rapport $\frac{dy}{dx}$ s'obtient en différenciant l'équation de la courbe à laquelle on doit mener une tangente, ce qui revient à la méthode élémentaire que nous avons exposée au n°. 43.

Pour seconde application, comparons le cercle avec la courbe proposée $y = f(x)$, et, dans cette vue, prenons pour équation de sa circonférence,

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 = \gamma^2 : \qquad (1)$$

en la différenciant, on obtient

$$(x' - \alpha) + (y' - \beta)\frac{dy'}{dx'} = 0;$$

et par conséquent

$$\frac{dy'}{dx'} = q' = -\frac{x' - \alpha}{y' - \beta};$$

ainsi, à cause des relations $y' = y$, $\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}$, on a

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma^2, \quad p' = -\frac{x - \alpha}{y - \beta},$$

d'où l'on tire

$$\alpha = x + \frac{\gamma p'}{\sqrt{1 + p'^2}}, \quad \beta = y - \frac{\gamma}{\sqrt{1 + p'^2}}.$$

Telles sont les coordonnées du centre du cercle ; coordonnées qui seront entièrement déterminées si le point de contact et le rayon sont donnés, puisque $p' = \frac{dy}{dx}$ se tirera de l'équation de la courbe proposée. Mais si on attribue différentes valeurs au rayon, et que l'on élimine ce rayon entre ces deux dernières équations, l'on aura

$$\beta - y = -\frac{dx}{dy}(\alpha - x).$$

Celle-ci, qui appartient évidemment à une droite dont les coordonnées sont $\alpha$, $\beta$, est normale à la courbe proposée, et représente, par conséquent, le lieu de tous les cercles susceptibles de former un contact simple avec cette courbe.

Puisque l'équation générale du cercle renferme trois constantes, et que l'on en détermine seulement deux lors du contact du premier ordre, on peut supposer que le cercle satisfait aux trois conditions suivantes :

$$y' = y, \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

ou

$$y' = y, \quad q' = p', \quad q'' = p''.$$

Dans cette hypothèse, l'équation précédente (1) donnera, après l'avoir différenciée deux fois de suite, et changé $x'$ en $x$ et $y'$ en $y$,

$$(x - \alpha) + (y - \beta)\frac{dy}{dx} = 0, \qquad (2)$$

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - \beta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0. \qquad (3)$$

Tirant de celles-ci les valeurs de $x-\alpha$, et $y-\beta$, pour les substituer dans (1), on obtiendra définitivement

$$x-\alpha=\frac{p'(1+p'^2)}{p''},\quad y-\beta=-\frac{1+p'^2}{p''},$$

$$\gamma=\frac{(1+p'^2)^{\frac{3}{2}}}{p''}=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y}.$$

De cette manière, le cercle cherché, que l'on nomme *cercle osculateur*, sera déterminé de grandeur et de position, et jouira, par rapport à tous les cercles qui forment un contact simple, de la même propriété que la tangente à l'égard des sécantes. Le rayon $\gamma$ du cercle osculateur s'appelle aussi *rayon de courbure*, parce qu'il est commode de mesurer la courbure d'une courbe par celle de ce cercle.

On voit, par cette théorie, qu'une courbe osculatrice ne peut être de l'ordre $n$, à moins qu'elle n'offre $n+1$ constantes dans son équation. Ainsi, par exemple, la parabole cubique $y=a+bx+cx^2+dx^3$ est susceptible d'avoir au plus un contact du troisième ordre, parce que les constantes $a$, $b$, $c$, $d$, que l'on nomme *élémens du contact*, sont au nombre de quatre.

Dans l'expression précédente du rayon de courbure, $dx$ est supposé constant : or, comme la différentielle de l'arc $s$ est $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$, il est clair que... $ds^3=(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}$, par conséquent

$$\gamma=\frac{ds^3}{d.\left(\frac{dy}{dx}\right)dx^2}.$$

Mais en prenant la différentielle de $\frac{dy}{dx}$, et faisant tout varier, ce qui établit l'hypothèse que $x$ et $y$ sont implicitement fonctions d'une troisième variable, on a cette expression symétrique,

$$\gamma = \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Lorsque $ds$ est considéré comme constant, on trouve, en différenciant $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ dans cette supposition,

$$d^2y = -\frac{dx}{dy}\,d^2x, \quad \text{ou} \quad d^2x = -\frac{dy}{dx}\,d^2y;$$

partant

$$\gamma = -\frac{dy\,ds}{d^2x}, \qquad \gamma = \frac{dx\,ds}{d^2y}.$$

Dans les applications, soit que l'on emploie l'une ou l'autre de ces trois formules, on parviendra toujours au même résultat.

155. La méthode qui vient de nous faire connaître le rayon de courbure, s'applique avec le même succès aux courbes rapportées à des coordonnées polaires. Voici, en peu de mots, comment il faut procéder pour obtenir, dans cette hypothèse, l'expression de ce rayon.

Soit $r$ le rayon vecteur, et $\phi$ l'angle qu'il fait avec l'axe des $x$, on aura, n°. 40,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi.$$

Or, l'équation (1) du cercle osculateur (n°. 154.) devient, au point de contact,

$$(r\cos\varphi-\alpha)^2+(r\sin\varphi-\beta)^2=\gamma^2. \qquad (m)$$

Donc, si on différencie deux fois consécutives, par rapport à $r$ et à $\varphi$, et en regardant $d\varphi$ comme constant, on aura ces deux équations

$$(r\cos\varphi-\alpha)\left(\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi-r\sin\varphi\right)+(r\sin\varphi-\beta)\left(\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi+r\cos\varphi\right)=0,$$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi-r\sin\varphi\right)^2+(r\cos\varphi-\alpha)\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2}\cos\varphi-2\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi-r\cos\varphi\right)$$
$$+\left(\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi+r\cos\varphi\right)^2+(r\sin\varphi-\beta)\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2}\sin\varphi+2\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi-r\sin\varphi\right)=0,$$

desquelles on tirera les valeurs de $(r\sin\varphi-\beta)$ et de $(r\cos\varphi-\alpha)$, que l'on substituera ensuite dans l'équation $(m)$, et l'on trouvera définitivement, pour le rayon osculateur dans les courbes polaires,

$$\gamma=\frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2}\right)}=\frac{(r^2d\varphi^2+dr^2)^{\frac{3}{2}}}{d\varphi^3r^2+2\,dr^2d\varphi-rd^2rd\varphi};$$

c'est à quoi M. Lacroix est parvenu par un autre procédé (*Traité élém. de cal. diff.*, pag. 157).

Puisque la grandeur et la position du rayon de courbure dépendent des valeurs des coordonnées du point de contact, on conçoit que le lieu géométrique de tous les centres des cercles osculateurs sont sur une certaine courbe

dont l'équation en $\alpha$ et $\beta$ doit s'obtenir en substituant dans celles (2) et (3) du n°. précédent, les valeurs de $y$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ en fonctions de $x$, déduites de l'équation de la courbe proposée, et ensuite en éliminant $x$ entre ces deux résultats, afin d'en obtenir un troisième indépendant des valeurs particulières des coordonnées du point de contact. C'est cette courbe que l'on nomme *développée*: elle jouit de plusieurs propriétés remarquables; par exemple, elle est toujours rectifiable pour les courbes algébriques, parce que la longueur d'un de ses arcs est la différence de deux rayons de courbure correspondant aux extrémités de cet arc (*Voy. le Traité cité au* n°. 100.), et elle est touchée par tous ces rayons de courbure.

156. Actuellement, il importe de faire connaître comment on détermine l'équation de la courbe qui en touche une infinité d'autres d'une nature donnée, et assujéties à se succéder suivant une loi connue.

Pour bien fixer les idées à cet égard, concevons qu'un cercle variable de position se meuve dans son plan, de manière que le centre se trouve toujours sur une courbe dont l'équation soit $y = \varphi(x)$, $\varphi$ étant le signe d'une fonction donnée. Celle du cercle étant . . . . . $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$, les coordonnées $\alpha$, $\beta$ du centre seront liées entre elles par l'équation $\beta = \varphi(\alpha)$, en sorte que la précédente pourra être écrite ainsi :

$$(x-\alpha)^2 + (y-\varphi(\alpha))^2 = r^2. \qquad (n)$$

Or, si l'abscisse $\alpha$ reçoit un accroissement infiniment petit $d\alpha$, le cercle, qui ne changera pas de grandeur,

prendra une nouvelle position infiniment près de celle qu'il avait d'abord, et sa circonférence coupera la première en deux points dont les coordonnées $x$, $y$ seront communes à ces deux lignes et par conséquent ne varieront pas en passant d'un cercle à l'autre. Si on passe de la même manière de cette seconde position à une troisième, et ainsi de suite, le système de tous les points d'intersection que l'on obtiendra d'un même côté de la ligne des centres formera une courbe qui sera celle de contact cherchée. Pour en avoir l'équation, il faudra donc différencier $(n)$ par rapport à $\alpha$ seulement, et égaler cette différentielle à zéro; ensuite éliminer $\alpha$ entre ces deux équations; et le résultat de l'élimination offrira une relation entre $x$ et $y$, indépendante de la position du centre de tous les cercles enveloppés.

Soit, en général, $V = f(x, y, \alpha) = 0$, l'équation de la courbe génératrice, et dans laquelle $\alpha$ est une constante arbitraire; on aura ces deux-ci :

$$V = 0,$$

$$\frac{dV}{d\alpha} = 0,$$

entre lesquelles on éliminera la constante dont il s'agit, pour déterminer l'équation de la courbe qui touche toutes celles que l'on obtient en attribuant à cette constante toutes les valeurs possibles dans l'équation $V = 0$.

157. Ce qui peut être abstrait dans cette théorie sera plus facile à saisir en passant aux applications. Supposons d'abord qu'il soit question de *déterminer la ligne touchant à la fois tous les cercles de même rayon*, et

*décrits de tous les points d'une droite donnée sur un plan, comme centres.*

Soit

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2, \qquad (1)$$

l'équation de l'un de ces cercles, et

$$y=Ax',$$

l'équation du lieu de leurs centres. Puisqu'on aura entre $\alpha$ et $\beta$ la relation $\beta=A\alpha$, la première équation deviendra, en y substituant pour $\beta$ sa valeur,

$$(x-\alpha)^2+(y-A\alpha)^2-r^2=V=0,$$

laquelle étant différenciée par rapport à $\alpha$ seulement, donnera

$$(x-\alpha)+(y-A\alpha)\,A=\frac{dV}{d\alpha}=0,$$

d'où

$$\alpha=\frac{x+Ay}{A^2+1}.$$

Mettant cette valeur dans $V$, on obtient

$$A^2x^2-2Axy+y^2=r^2(A^2+1),$$

et, extrayant la racine carrée de part et d'autre, on a, pour les équations des deux tangentes cherchées,

$$y=Ax+r(A^2+1),$$
$$y=Ax-r(A^2+1).$$

Ces tangentes sont donc parallèles à la ligne des centres, ce qui est d'ailleurs de toute évidence.

Cherchons actuellement *quelle est la courbe qui touche à la fois tous les cercles* (1) *décrits du même rayon, mais dont les centres sont sur une même circonférence donnée par* $x'^2 + y'^2 = \rho^2$.

Alors la relation entre $\alpha$ et $\beta$ sera

$$\alpha^2 + \beta^2 = \rho^2,$$

et l'équation (1) se changera en celle-ci :

$$(x-\alpha)^2 + (y - \sqrt{\rho^2 - \alpha^2})^2 - r^2 = V = 0;$$

de là

$$-x\sqrt{\rho^2-\alpha^2} + \alpha y = \frac{dV}{d\alpha} = 0,$$

et par suite

$$\alpha = \frac{x\rho}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \beta = \frac{y\rho}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Mettant ces valeurs dans (1), et, faisant, pour simplifier, $x^2 + y^2 = z^2$, on aura

$$z^2 - 2\rho z + \rho^2 = r^2,$$

d'où l'on tire

$$z = \rho \pm r, \qquad \text{et} \quad z^2 = (\rho \pm r)^2,$$

ou enfin

$$x^2 + y^2 = (\rho \pm r)^2;$$

c'est-à-dire que les deux courbes de contact cherchées sont des cercles dont le centre commun est à l'origine des axes, et dont les rayons sont $\rho + r$ et $\rho - r$. On

reconnaît sans doute cette vérité indépendamment de tout ce calcul; mais il est utile, dans les premières applications d'une théorie, de choisir de préférence des exemples qui amènent à des résultats connus d'avance, afin d'être mieux pénétré de l'exactitude des opérations algébriques auxquelles cette théorie donne lieu. C'est par un procédé analogue, que M. Lacroix, dans son *Traité de calcul différentiel*, in-4°., a déterminé les équations des *roulettes* en général, et de la cycloïde en particulier.

Voici encore deux autres problèmes dont les solutions reposent sur la théorie précédente.

158. *Déterminer toutes les lignes qui retranchent des surfaces équivalentes d'un angle donné.*

[Fig. 96.] Prenons pour axes des $x$ et des $y$ les côtés mêmes de l'angle donné $XAY$, et supposons qu'une des droites cherchées soit $RN$, c'est-à-dire que l'espace triangulaire $NAR$ soit équivalent à $q^2$. Comme l'équation de la droite $RN$ est généralement

$$y = Mx + N, \qquad (1)$$

on aura $AN$, ou $x = -\frac{N}{M}$, et $AR$, ou $y = N$; et, à cause de $q^2 = \frac{AN \times AR}{2} \sin \phi$, il est clair que $q^2 = -\frac{N^2}{2M} \sin \phi$, d'où l'on tire

$$M = -\frac{N^2 \sin \phi}{2 q^2};$$

l'équation de cette droite devient donc

$$y = -\frac{N^2 \sin \varphi}{2 q^2} x + N. \qquad (2)$$

Or, si une autre droite $R'N'$ est infiniment voisine de celle-ci, et que l'espace $AN'R'$ soit encore équivalent à $q^2$, les deux droites, dont il s'agit, auront à leur point $M$ d'intersection les mêmes coordonnées; ainsi, dans l'équation (2), la seule quantité qui aura varié sera $N$; il suit donc de là que si on différencie cette équation dans cette hypothèse, la résultante donnera

$$N = \frac{q^2}{x \sin \varphi},$$

et, partant, on aura

$$M = -\frac{q^2}{2 x^2 \sin \varphi};$$

l'équation (1) se changera donc en celle-ci,

$$y = -\frac{q^2}{2 x^2 \sin \varphi} x + \frac{q^2}{x \sin \varphi};$$

par conséquent

$$xy = \frac{q^2}{2 \sin \varphi} \qquad (3)$$

est le lieu hyperbolique des points $M$ d'intersection de deux droites consécutives quelconques $NR$, $N'R'$, qui résolvent la question. Ces droites sont donc tangentes à cette courbe.

Maintenant, si on demandait de déterminer la position de la tangente qui correspond à la normale passant par le sommet $A$ de l'angle donné, on s'y prendrait ainsi qu'il suit:

L'équation de la tangente à la courbe actuelle est

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x) = -\frac{y}{x}(x' - x),$$

ou bien

$$yx' + xy' = 2xy ; \qquad (4)$$

et de là on tire

$$AN = 2x , \quad AR = 2y.$$

Pour déterminer l'équation de la normale passant par l'origine, il faut faire usage des formules du n°. 39, relatives aux coordonnées obliques. De ces formules, et de l'équation (4) de la tangente, qui peut être écrite ainsi,

$$Ax' + By' = \rho ,$$

on déduit

$$A = y , \quad B = x ,$$

et

$$\alpha = \frac{A - B\cos(x,y)}{\sin^2(x,y)} , \qquad \beta = \frac{B - A\cos(x,y)}{\sin^2(x,y)} ;$$

ainsi l'équation de la normale, qui est $y' = \frac{\beta}{\alpha} x'$, devient

$$y' = \frac{x - y\cos(x,y)}{y - x\cos(x,y)} x'.$$

Mais au point de contact, $x'$ et $y'$ se changent respectivement en $x$ et $y$ : cette dernière équation donne donc

$$x = y.$$

D'où il suit que lorsque la ligne $RN$ est perpendiculaire

à la droite normale passant par l'origine, on a.... $AN = AR = 2y$. Cette normale divise donc en deux parties égales l'angle donné. Mais l'équation (3) de la courbe fournit alors

$$y = \sqrt{\frac{q^2}{2 \sin \varphi}};$$

donc

$$AN = AR = \sqrt{\frac{2q^2}{\sin \varphi}};$$

donc la tangente cherchée est la base d'un triangle isocèle.

Nous ne nous arrêterons pas à prouver que, dans ce cas, cette base est un *minimum*, parce que cela ne présente aucune difficulté.

159. *Déterminer l'équation d'une caustique par réflexion.*

Si d'un point lumineux situé dans le plan d'une courbe, partent une infinité de rayons de lumière, et que ceux qui frappent cette courbe soient réfléchis de manière que l'angle de réflexion soit égal à l'angle d'incidence, il existera une courbe qui sera touchée par tous ces rayons : telle est celle que l'on nomme *caustique par réflexion*.

Cela posé, soient $XY$ les coordonnées rectangles d'un point lumineux ; l'équation d'un rayon de lumière sera

$$y - Y = a(x - X). \qquad (a)$$

Si ce rayon frappe, en un point $x'y'$, une courbe de l'équation

$$F(x', y') = 0, \qquad (F)$$

qui a pour différentielle

$$mdx' + ndy' = 0, \qquad (F')$$

il se réfléchira suivant une droite dont nous représenterons l'équation par

$$y - y' = a'(x - x'); \qquad (a')$$

et les deux lignes $(a)$, $(a')$ formant des angles égaux avec la normale à la courbe $(F)$, on exprimera cette condition ainsi qu'il suit :

D'abord l'équation de la normale est (n°. 154.)

$$y - y' = \frac{n}{m}(x - x'),$$

et l'angle $\theta$ qu'elle formera avec la ligne d'incidence $(a)$, aura pour tangente, $\text{tang}\,\theta = \frac{n - am}{m + an}$ : or, l'angle de réflexion étant égal à celui-ci, il est évident que les deux lignes $(a)$, $(a')$ formeront entre elles un angle $2\theta$, dont la tangente sera

$$\text{tang}\,2\theta = \frac{2(n - am)(m + an)}{(m + an)^2 - (n - am)^2};$$

mais parce que l'on a en outre

$$\text{tang}\,2\theta = \frac{a' - a}{1 + aa'},$$

il s'ensuit qu'en égalant ces deux valeurs, on obtient une équation de laquelle on tire, après l'avoir divisée par $a^2 + 1$,

$$a' = \frac{an^2 + 2mn - am^2}{m^2 - 2amn - n^2}.$$

Cette expression devient fonction du point incident $x'y'$ et du point lumineux $XY$ donné, en y mettant pour $a$ sa valeur $\frac{y' - Y}{x' - X}$; ainsi l'équation du rayon réfléchi, est

$$y - y' = \frac{an^2 + 2mn - am^2}{m^2 - 2amn - n^2}(x - x'). \quad (a'')$$

Or, d'après ce qui précède, si l'on passe de ce rayon à celui qui en est infiniment proche, ces deux rayons auront, à leur point d'intersection, les mêmes coordonnées $x$, $y$, et les seules quantités qui auront varié seront $x'$, $y'$; supposons donc qu'on ait mis dans $(a'')$, pour $x'$ sa valeur tirée de l'équation $(F)$, et qu'on ait éliminé la variable $y'$ entre l'équation $(a'')$ et sa différentielle, on aura l'équation demandée de la caustique par réflexion.

Celles des *caustiques par réfraction* s'obtiendraient par les mêmes principes.

### *Osculation des courbes à double courbure.*

160. Nous avons déja dit, au n°. 125, qu'une courbe à double courbure appartient à la géométrie des trois dimensions, et qu'elle est donnée, dans l'espace, par l'intersection de deux surfaces courbes connues, sur lesquelles elle se trouve à la fois. Soient donc

$$y = f(x), \qquad z = F(x),$$

les équations des deux projections de cette courbe (n°. 108.) sur les plans coordonnés $xy$, $xz$; et supposons qu'une autre courbe soit donnée de même par

$$y' = \varphi(x'), \qquad z' = \Phi(x').$$

Si on veut qu'elles aient toutes deux un point commun pour une même abscisse $x$, il faudra qu'en faisant $x' = x$, on ait en même tems $y' = y$ et $z' = z$. Or, pour un point répondant à l'abscisse $x + h$, les ordonnées $y$, $z$ deviendront respectivement

$$y + k = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \ldots\ldots$$

$$z + l = z + \frac{dz}{dx}h + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \ldots\ldots$$

et les ordonnées $y'$, $z'$ se changeront en $y' + k'$; $z' + l'$; de sorte que si, pour abréger, on fait

$$Y = (y+k) - (y'+k'), \quad \text{et } Z = (z+l) - (z'+l'),$$

la distance $\Delta$ entre les points des deux courbes, qui répondent à la même abscisse $x + h$ aura pour expression

$$\Delta = \sqrt{Y^2 + Z^2}.$$

Ainsi, pour une troisième courbe

$$y'' = \psi(x''), \quad z'' = \chi(x''),$$

la distance $D$ entre elle et la première courbe, répondant à l'abscisse $x + h$ dont il s'agit, serait

$$D = \sqrt{Y'^2 + Z'^2}.$$

Or, par des raisonnemens semblables à ceux du n°. 153, on prouvera que, pour un contact du premier ordre, on doit avoir

$$y'=y,\ z'=z,\ \frac{dy'}{dx'}=\frac{dy}{dx},\ \frac{dz'}{dx'}=\frac{dz}{dx};$$

parce qu'alors la troisième courbe, pour laquelle ces conditions ne se vérifieraient pas, ne pourrait passer entre les deux autres, puisque l'on aurait $\Delta < D$.

La seconde courbe formera donc avec la première, un contact du second ordre, si on a

$$y'=y,\ z'=z,\ \frac{dy'}{dx'}=\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2z'}{dx'^2}=\frac{d^2z}{dx^2};$$

et ainsi de suite.

En général, soient $x$, $y$, $z$ les coordonnées d'une courbe proposée, et, $x'$, $y'$, $z'$ celles d'une courbe donnée, pour laquelle on demande les conditions du contact d'un ordre déterminé avec la courbe proposée; si. . . $\varphi(x',y',z')=u'=0$, $\Phi(x',y',z')=U'=0$ sont les deux équations de la courbe donnée (n°. 125), on aura, pour un contact du premier ordre, les quatre équations

$$u=0,\qquad U=0,$$
$$du=0,\qquad dU=0;$$

$u$ et $U$ étant ce que deviennent respectivement $u'$ et $U'$ lorsqu'on y change $x'y'z'$ en $xyz$; et pour un contact du second ordre, on aura, de plus, les deux équations

$$d^2u=0,\qquad d^2U=0,$$

et ainsi de suite, en regardant, dans ces équations dif-

férentielles, $y$ et $z$ comme fonctions de $x$. On satisfera à ces équations par le moyen des constantes arbitraires qui entreront dans les fonctions données $u'$ et $U'$, et cela, de la même manière qu'au n°. 154.

161. Il résulte de là que, si les deux équations de la tangente à une courbe à double courbure, sont en général

$$y' = Ax' + B, \qquad z' = A'x' + B',$$

il faudra, en vertu des relations précédentes, relatives au point de contact, y écrire $x$, $y$, $z$ au lieu de $x'$, $y'$, $z'$, et l'on en tirera

$$\frac{dy}{dx} = A, \qquad \frac{dz}{dx} = A';$$

par suite

$$B = y - \frac{dy}{dx}x, \qquad B' = z - \frac{dz}{dx}x;$$

donc les équations de la tangente rapportée aux coordonnées $x'$, $y'$, $z'$, sont

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x), \qquad (1)$$

$$z' - z = \frac{dz}{dx}(x' - x); \qquad (2)$$

ou à cause que . . . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{d.f(x)}{dx} = f'(x)$, $\frac{dz}{dx} = \frac{d.F(x)}{dx} = F'(x)$, ces équations peuvent être écrites ainsi :

$$y' - f(x) = (x' - x)\,f'(x), \qquad (1')$$

$$z' - F(x) = (x' - x)\,F'(x); \qquad (2')$$

et comme elles représentent évidemment celles des tangentes aux courbes planes (n°. 154.) qui sont les projections de la courbe proposée, il s'ensuit que le problême de mener une tangente à une courbe à double courbure consiste à en mener une à chacune des deux projections de cette courbe; et, en effet, ces deux dernières seront les projections de la tangente cherchée. Cette conséquence est une nouvelle preuve de l'exactitude du procédé employé au n°. 148, pour déterminer le rapport entre un angle et sa projection.

La position du plan normal, c'est-à-dire du plan mené par le point de contact, perpendiculairement à la tangente, est facile à trouver; car, en vertu des équations précédentes, et de ce qui a été dit au n°. 109, l'équation différentielle de ce plan est

$$(x'-x)\frac{dx}{dz}+(y'-y)\frac{dy}{dz}+(z'-z)=0.$$

Les équations (1′) et (2′) ne renferment que la variable $x$: si donc l'on éliminait cette variable entre elles, ou aurait une relation entre $x'$, $y'$, $z'$, indépendante des coordonnées du point de contact, et qui serait évidemment l'équation de la surface formée par toutes les tangentes à la courbe donnée dans l'espace. Il suit de là que, si cette courbe était plane, la surface dont il s'agit serait un plan; mais, dans le cas contraire, cette même surface serait une surface développable dont la courbe proposée formerait l'arête de rebroussement. (*Voyez* à ce sujet la *Géométrie descriptive* de Monge, ou celle de Lacroix.)

162. C'est par les mêmes principes que l'on détermine

le cercle osculateur d'une courbe à double courbure ; voici, à cet égard, comment l'on procède de la manière la plus simple.

En considérant le cercle cherché comme un des grands cercles de la sphère

$$(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+(z'-\gamma)^2=\delta^2,$$

son plan, rapporté aux mêmes coordonnées, et passant par le point $\alpha\beta\gamma$, a généralement pour équation

$$(x'-\alpha)+M(y'-\beta)+N(z'-\gamma)=0;$$

et si on change ici $x'y'z'$ en $xyz$, pour exprimer que le cercle cherché a un point de commun avec la courbe à double courbure proposée, on aura, en prenant les équations différentielles du premier et du second ordre,

$$\begin{aligned}
&(x-\alpha)^2+\quad(y-\beta)^2\quad+\quad(z-\gamma)^2=\delta^2,\\
&(x-\alpha)+M(y-\beta)\quad+N(z-\gamma)=0,\\
&(x-\alpha)+\quad(y-\beta)\frac{dy}{dx}+(z-\gamma)\frac{dz}{dx}=0,\\
&\qquad\qquad 1+M\frac{dy}{dx}+N\frac{dz}{dx}=0,\\
&1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}+(z-\gamma)\frac{d^2z}{dx^2}=0,\\
&\qquad\qquad M\frac{d^2y}{dx^2}+N\frac{d^2z}{dx^2}=0.
\end{aligned}$$

De ces six équations, les quatre premières renferment seulement les conditions nécessaires pour que le cercle dont il s'agit forme un contact du premier ordre avec

une courbe à double courbure, dont $x$, $y$, $z$ sont les coordonnées, et pour laquelle $y = f(x)$, $z = F(x)$; mais en prenant toutes ces équations, elles fournissent les conditions du contact du second ordre; et, pour lors, le cercle, qui se trouve entièrement déterminé de grandeur et de position, devient osculateur de la courbe. Dans ce cas, si, pour abréger, l'on fait

$$\frac{dy}{dx} = p', \quad \frac{dz}{dx} = q', \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p'', \quad \frac{d^2z}{dx^2} = q'',$$

et

$$R = \sqrt{[(Np' - Mq')^2 + (N - q')^2 + (M - p')^2]},$$

les trois premières équations précédentes donneront ces valeurs

$$x - \alpha = \frac{(Np' - Mq')\delta}{R}, \quad y - \beta = -\frac{(N - q')\delta}{R}, \quad z - \gamma = \frac{(M - p')\delta}{R},$$

au moyen desquelles la cinquième équation fournira

$$\delta = \frac{(1 + p'^2 + q'^2)\,R}{(N - q')\,p'' - (M - p')\,q''}.$$

Enfin, la quatrième et la sixième équation donneront

$$M = \frac{q''}{q'p'' - p'q''}, \qquad N = -\frac{p''}{q'p'' - p'q''},$$

et, de là, les expressions ci-dessus se changeront en celles-ci, après les réductions,

$$\delta = -\frac{(1+p'^2+q'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{[p''^2+q''^2+(p'q''-q'p'')^2]}},$$

$$\alpha = x - \frac{(1+p'^2+q'^2)(p'p''+q'q'')}{p''^2+q''^2+(p'q''-q'p'')^2},$$

$$\beta = y + \frac{(1+p'^2+q'^2)[p''-p'(p'p''+q'q'')]}{p''^2+q''^2+(p'q''-q'p'')^2},$$

$$\gamma = z + \frac{(1+p'^2+q'^2)[q''-q'(p'p''+q'q'')]}{p''^2+q''^2+(p'q''-q'p'')^2}.$$

Ce sont ces formules mêmes que M. Monge a obtenues par une autre méthode (*Voy.* sa *Géom. analyt.*, p. 366). La courbe des centres de tous les cercles osculateurs n'est pas une développée, comme dans les courbes planes; et il est remarquable que le plan de l'un de ces cercles coïncide avec celui de deux côtés consécutifs de la courbe à double courbure à laquelle il se rapporte, plan qui est aussi osculateur de cette courbe. Il y aurait encore bien des choses importantes à dire sur le sujet actuel, mais pour ne pas sortir des bornes d'un ouvrage élémentaire, nous renverrons au *Cal. différent. et intég.* de Lacroix, tom. I.

### *Osculation des surfaces courbes.*

163. Une surface étant donnée par une seule équation entre trois variables, une d'elles est fonction des deux autres, et celles-ci sont indépendantes entre elles. Ainsi, en représentant par

$$z = f(x, y), \qquad z' = F(x', y'),$$

les symboles des équations de deux surfaces qui passent

par le même point, on aura, en changeant $x$ en $x+h$, et $y$ en $y+k$,

$$z+l=z+\left(\frac{dz}{dx}\right)h+\left(\frac{dz}{dy}\right)k$$
$$+\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)h^2+2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)hk+\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)k^2\right]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et

$$z'+l'=z'+\left(\frac{dz'}{dx'}\right)h+\left(\frac{dz'}{dy'}\right)k$$
$$+\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)h^2+2\left(\frac{d^2z'}{dx'dy'}\right)hk+\left(\frac{d^2z'}{dy'^2}\right)k^2\right]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

séries que nous représenterons plus simplement par

$$z+l=z+ph+qk,$$
$$+\tfrac{1}{2}(rh^2+2shk+tk^2)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et

$$z'+l'=z'+Ph+Qk,$$
$$+\tfrac{1}{2}(Rh^2+2Shk+Tk^2)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et dans lesquelles nous supposerons qu'aucun terme n'est infini. Or, au point commun, on a $x'=x$, $y'=y$, $z'=z$, et la distance des deux surfaces, mesurée sur l'ordonnée qui répond à $x+h$, et $y+k$, est

$$\Delta=(P-p)h+(Q-q)k$$
$$+\tfrac{1}{2}[(R-r)h^2+2(S-s)hk+(T-t)k^2]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il faut donc, d'après ce qui précède, que, pour un contact du premier ordre, on ait $P-p=0$, $Q-q=0$, ou, ce qui est de même,

$$x'=x, y'=y, z'=z, \left(\frac{dz'}{dx'}\right)=\left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz'}{dy'}\right)=\left(\frac{dz}{dy}\right);$$

car une troisième surface, qui ne remplirait pas ces conditions, ne pourrait passer entre les deux autres, du moins tant que les termes du premier ordre seront plus grands que ceux des ordres supérieurs; et c'est ce qui arrivera en prenant $h$ et $k$ assez petits pour cela.

Quant au contact du second ordre, il aura lieu si on a de plus $R-r=0$, $S-s=0$, $T-t=0$; et ainsi de suite pour les contacts des ordres plus élevés.

Afin de nous arrêter au cas particulier que nous avons déja traité par une autre voie, nous supposerons que la surface touchante soit un plan; alors l'équation . . . . $z'=F(x', y', z')$ prendra cette forme

$$z'=Ax'+By'+D;$$

et, à cause des équations de condition précédentes, on aura, au point de contact,

$$z=Ax+By+D;$$

puis, en différenciant successivement par rapport à $x$ et $y$, on trouvera

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=A, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right)=B;$$

de là

$$D=z-\left(\frac{dz}{dx}\right)x-\left(\frac{dz}{dy}\right)y;$$

l'équation du plan tangent à une surface courbe quelconque, est donc

$$z' - z = \left(\frac{dz}{dx}\right)(x' - x) + \left(\frac{dz}{dy}\right)(y' - y)$$
$$= p\,(x' - x) + q\,(y' - y).$$

$x$, $y$, $z$ étant les coordonnées du point de contact, et $p$, $q$ des coefficiens aux différentielles partielles.

Maintenant, il est très-aisé de déterminer les équations de la normale à la surface proposée, c'est-à-dire de la perpendiculaire au plan tangent : en effet, il résulte, du n°. 109, qu'elles sont

$$x' - x + p\,(z' - z) = 0,\quad y' - y + q\,(z' - z) = 0. \quad (N)$$

164. Parmi le grand nombre de problêmes dans les solutions desquels ces dernières formules trouvent leur application, nous choisirons le suivant, que nous avons déja résolu en deux dimensions :

*Etant données dans l'espace la position d'un point lumineux et la direction d'un des rayons qui en émanent, et qui viennent frapper une surface connue, déterminer l'équation du rayon réfléchi.*

Non-seulement, comme nous l'avons déja dit, l'angle d'incidence est toujours égal à l'angle de réflexion, mais l'expérience prouve, en outre, que ces deux angles sont dans le plan qui passe par la normale au point d'incidence.

Cela posé, soient $XYZ$ les coordonnées rectangles du point lumineux; les équations des projections d'un rayon de lumière seront

$$x - X = M(z - Z), \quad y - Y = N(z - Z),$$

mais pour rendre les calculs plus symétriques, nous donnerons à ces équations, la forme suivante :

$$a(z - Z) = c(x - X), \quad b(z - Z) = c(y - Y); \quad (a)$$

et comme la surface réfléchissante est connue, nous représenterons son équation par

$$F(x', y', z') = 0, \quad mdx' + ndy' + rdz' = 0. \quad (F)$$

Or, le rayon incident dont il s'agit, étant réfléchi suivant une droite partant du point $x'y'z'$ de cette surface, ses équations seront, en général,

$$a'(z - z') = c'(x - x'), \quad b'(z - z') = c'(y - y'). \quad (a')$$

Les deux lignes $(a)$, $(a')$, formant des angles égaux avec la normale à la surface, le cosinus de l'angle d'incidence sera égal au cosinus de l'angle de réflexion ; ainsi, en vertu du n°. 105, cette condition sera exprimée par l'équation

$$\frac{am + bn + cr}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a'm + b'n + c'r}{(a'^2 + b'^2 + c'^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (b)$$

Il reste à écrire analytiquement que le rayon incident $(a)$, le rayon réfléchi $(a')$ et la normale, sont dans un même plan. Pour cet effet, soit

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0,$$

l'équation de ce plan ; celles des projections de la normale seront, à cause de l'équation différentielle $(F)$ de la

surface réfléchissante,

$$m(z-z')=r(x-x'),\quad n(z-z')=r(y-y');\quad (N)$$

et la condition du n°. 111, qui exprime qu'une droite est parallèle à un plan, fournira ces deux équations,

$$Aa+Bb+Cc=0,$$
$$Am+Bn+Cr=0.$$

Si donc l'on fait usage des valeurs de $A$ et $B$, déduites de ces dernières équations, l'on aura, pour équation du plan passant par la normale et le rayon incident,

$$(cn-br)(x-x')+(ar-cm)(y-y')+(bm-an)(z-z')=0;$$

et si l'on met ici, pour $x-x'$ et $y-y'$, leurs valeurs fournies par les équations $(a')$, la condition cherchée sera

$$a'(cn-br)+b'(ar-cm)+c'(bm-an)=0;\quad (c)$$

alors des équations $(b)$, $(c)$, l'on tirera

$$\frac{a'}{c'}=\frac{mr(a^2+b^2+c^2)+(cn-br)(bm-an)\pm(ar-cm)(am+bn+cr)}{r^2(a^2+b^2+c^2)-(cn-br)^2-(ar-cm)^2},$$

$$\frac{b'}{c'}=\frac{nr(a^2+b^2+c^2)+(ar-cm)(bm-an)\pm(br-cn)(am+bn+cr)}{r^2(a^2+b^2+c^2)-(cn-br)^2-(ar-cm)^2};$$

c'est-à-dire, à cause du double signe,

$$\frac{a'}{c'}=\frac{a}{c},\qquad \frac{b'}{c'}=\frac{b}{c},$$

ou

$$\left.\begin{aligned}\frac{a'}{c'}&=\frac{2(am+bn+cr)\,m-a(m^2+n^2+r^2)}{2(am+bn+cr)\,r-c(m^2+n^2+r^2)}\\ \frac{b'}{c'}&=\frac{2(am+bn+cr)\,n-b(m^2+n^2+r^2)}{2(am+bn+cr)\,r-c(m^2+n^2+r^2)}\end{aligned}\right\}\quad(d)$$

Dans le premier cas, les valeurs de $\frac{a'}{c'}$ et $\frac{b'}{c'}$ se rapportent au rayon incident; et, dans le second cas, elles appartiennent au rayon réfléchi. La position de ce dernier sera donc connue si celle du rayon incident est donnée; et pour qu'elle ne dépende que des coordonnées $x'y'z'$ et $XYZ$, il n'y aura qu'à mettre, dans les formules $(d)$, au lieu de $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, leurs valeurs respectives $\frac{x'-X}{z'-Z}$, $\frac{y'-Y}{z'-Z}$.

Supposons à présent que tous les rayons incidens soient parallèles à l'axe d'un paraboloïde de révolution de l'équation

$$z'^2+y'^2=ux';$$

$u$ étant le paramètre; et cherchons, en vertu de cette hypothèse, les équations des rayons réfléchis. Dans cette circonstance, on aura évidemment $a=\infty$, et pour lors les formules $(d)$ se réduiront à

$$\frac{a'}{c'}=\frac{m^2-(n^2+r^2)}{2mr},\quad \frac{b'}{c'}=\frac{n}{r};$$

les équations $(a')$ prendront donc cette forme

$$\left.\begin{aligned}z-z'&=\frac{2mr}{m^2-(n^2+r^2)}(x-x')\\ z-z'&=\frac{r}{n}(y-y')\end{aligned}\right\}\quad(a'')$$

En second lieu, l'équation différentielle du paraboloïde étant

$$ux' - 2y'dy' - 2z'dz' = 0,$$

on en tire

$$m = u, \quad n = -2y', \quad r = -2z';$$

et si, dans $(a'')$, on fait $z = 0$, pour trouver, sur le plan des $xy$, les coordonnées du point où les rayons réfléchis rencontrent ce plan, on aura

$$x = \frac{u}{4}, \qquad y = 0;$$

c'est-à-dire que, *si la surface concave d'un paraboloïde de révolution, est frappée par des rayons parallèles à son axe, tous les rayons réfléchis se réuniront au foyer.* (n°. 130. *L. C.*)

Les formules ci-dessus mettraient aussi en évidence cette propriété, que *si, dans un ellipsoïde de révolution les rayons incidens partent d'un foyer, tous les rayons réfléchis se réuniront à l'autre foyer.*

Un des plus beaux mémoires qui aient été publiés sur la géométrie analytique appliquée à l'optique, est celui de M. Malus, chef de bataillon au corps impérial du génie. Ce mémoire, dont ce qui précède est extrait en partie, se trouve dans le 14e. cahier du *Journal de l'École polytechnique.*

165. Pour appliquer encore la doctrine actuelle à la recherche des contacts, déterminons les coordonnées $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ du centre de la sphère touchante, dont le rayon est $\delta$, et qui est supposé former un contact simple. Son équation étant

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 + (z' - \gamma)^2 = \delta^2,$$

on aura, en changeant respectivement $x'$, $y'$, $z'$ en $x, y, z$, et en différenciant successivement par rapport à $x$ et $y$,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\delta^2, \quad (1)$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=p=-\frac{x-\alpha}{z-\gamma}, \quad (2) \qquad \left(\frac{dz}{dy}\right)=q=-\frac{y-\beta}{z-\gamma}. \quad (3)$$

Voilà donc trois équations entre $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$; ainsi

$$\alpha=x+\frac{\delta p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\beta=y+\frac{\delta q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\gamma=z-\frac{\delta}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Dans ces valeurs, le rayon de la sphère tangente est arbitraire; et si on l'élimine des deux premières, on aura ces deux équations :

$$\alpha-x+p(\gamma-z)=0, \quad \beta-y+q(\gamma-z)=0,$$

qui sont les mêmes que celles de la normale à la surface proposée. Concluons de là que les sphères touchantes ont toutes leur centre sur la normale menée par le point de contact.

Les équations (1), (2), (3) faisant seulement connaître trois des constantes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, il serait nécessaire, pour que la sphère proposée devînt osculatrice, que le troisième terme de la valeur de $\Delta$ (n°. 163) fût nul, auquel cas on aurait $R-r=0$, $S-s=0$, $T-t=0$, ou

$$z-y=-\frac{1+p^2+2pq\frac{dy}{dx}+(1+q^2)\frac{dy^2}{dx^2}}{r+2s\frac{dy}{dx}+t\frac{dy^2}{dx^2}}=M. \quad (4)$$

Mais parce que l'on a trouvé précédemment . . . . . $y=z-\frac{\delta}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, il s'ensuit que le rayon

$$\delta=M\sqrt{1+p^2+q^2}. \quad (5)$$

Dans cette circonstance, cette valeur de $\delta$ est celle du rayon de la sphère osculatrice d'une section quelconque faite dans la surface proposée suivant la normale à cette surface, et dont la projection de la direction, sur le plan $xy$, est déterminée par le rapport $\frac{dy}{dx}$. Or, la valeur de ce rapport étant arbitraire, on peut chercher celle qui rend le rayon de courbure $\delta$ un *maximum* ou un *minimum*. Pour cet effet, il n'y a qu'à égaler à zéro le coefficient différentiel de $\delta$, c'est-à-dire faire . . . . $\frac{d.\delta}{d.\left(\frac{dy}{dx}\right)}=0$, ou $\frac{dM}{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}=0$, puisque, dans l'expression de $\delta$, le facteur $\sqrt{1+p^2+q^2}$ ne renferme point la quantité $\frac{dy}{dx}$. Mais l'équation (4) pouvant être écrite ainsi :

$$M\left(r+2s\frac{dy}{dx}+t\frac{dy^2}{dx^2}\right)$$
$$+1+p^2+2pq\frac{dy}{dx}+(1+q^2)\frac{dy^2}{dx^2}=0, \quad (6)$$

on trouvera, en la différenciant par rapport à $\frac{dy}{dx}$, et en faisant $\frac{dM}{d\left(\frac{dy}{dx}\right)} = 0$, une équation de laquelle on tirera

$$M = -\frac{pq + (1+q^2)\frac{dy}{dx}}{s + t\frac{dy}{dx}}, \text{ et } \frac{dy}{dx} = -\frac{pq + Ms}{1 + q + Mt}.$$

Or, en vertu de cette seconde valeur, l'équation (6) deviendra, après avoir ôté le facteur commun qui naîtra de cette substitution,

$$\left.\begin{aligned} M^2(rt - s^2) + M[(1+p^2)r - 2pqs + (1+p^2)t] \\ + 1 + p^2 + q^2 \end{aligned}\right\} = 0. \quad (7)$$

Si l'on met en outre, dans la même équation (6), au lieu de $M$ sa valeur précédente, on trouvera, après avoir ordonné,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy^2}{dx^2}[(1+q^2)s - pqt] + \frac{dy}{dx}[(1+q^2)r - (1+p^2)t] \\ - (1+p^2)s + pqr \end{aligned}\right\} = 0. \quad (8)$$

Concluons de là que, puisque $\frac{dy}{dx}$, qui exprime la tangente trigonométrique de l'angle formé par l'axe des $x$ et la tangente à la courbe de projection de la section faite dans la sphère, est donnée par une équation du second degré, il y a toujours deux directions différentes suivant lesquelles se fait l'osculation, l'une qui répond à

une ligne de plus grande courbure, et l'autre à une ligne de moindre courbure. Mais la position du plan des $xy$ étant arbitraire, on peut la prendre telle, que l'équation (8) des lignes de courbure se simplifie de manière à laisser découvrir aisément la relation qu'ont entre elles les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$. Par exemple, en faisant coïncider ce plan avec celui qui touche la surface, et en plaçant l'origine des axes rectangles au point de contact, on a nécessairement $x=0$, $y=0$, $z=0$, et $p=0$, $q=0$; puisqu'alors la normale donnée par les formules ($N$) du n°. 163, se confond avec l'axe des $z$. Cette hypothèse réduit, en effet, l'équation (8) à

$$\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\left(\frac{r-t}{s}\right)-1=0; \qquad (9)$$

dans la même circonstance, on a, $\alpha=0$, $\beta=0$, et

$$\gamma=\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{r+2s\frac{dy}{dx}+t\frac{dy^2}{dx^2}}, \qquad \delta=-\gamma.$$

Or, si on représente par $m$ et $m'$ les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ que fournit l'équation (9), le dernier terme sera, comme on sait, égal au produit de ces deux valeurs; ainsi donc

$$mm'+1=0.$$

Donc, les projections des deux directions cherchées, sont, sur le plan des $xy$, perpendiculaires entre elles; donc,

les lignes de plus grande et de moindre courbure d'une surface quelconque sont à angles droits.

Maintenant, si on prend, pour axe des $x$, l'une des directions dont il s'agit, on aura $m = 0$ ; et pour l'autre direction qui représentera l'axe des $y$, la valeur de $m'$ sera infinie. Dans ce cas $s = 0$, comme cela est manifeste d'après l'équation (9), qui peut être écrite de ces deux manières :

$$m^2 s + m(r - t) - s = 0,$$

$$s + \frac{r - t}{m} - \frac{s}{m^2} = 0.$$

Il résulte de là que, pour une section, faisant un angle quelconque $V$ avec le plan des $xz$, on aura, à cause de $\text{tang } V = m$ et de $s = 0$,

$$\gamma = \frac{1 + \text{tang}^2 V}{r + t \,\text{tang}^2 V} = -\delta ;$$

mais, $\text{tang}^2 V = \dfrac{\sin^2 V}{\cos^2 V}$, donc

$$\delta = -\frac{1}{r \cos^2 V + t \sin^2 V}.$$

Pour faire dépendre explicitement ce résultat, du plus grand et du plus petit rayon de courbure, soit $\rho'$ le premier, et $\rho''$ le second ; pour lors la formule (7), dans laquelle il faudra faire $p = q = s = 0$, donnera

$$M = \frac{-(r + t) \pm (t - r)}{2rt},$$

et l'équation (5) fournira

$$\rho' = -\frac{1}{r}, \quad \text{et } \rho'' = -\frac{1}{t},$$

la valeur ci-dessus de $\delta$ deviendra donc

$$\delta = \frac{\rho'\rho''}{\rho'' \cos^2 V + \rho' \sin^2 V}.$$

J'ai fait usage de cette expression du rayon de courbure, lorsque j'ai exposé la théorie analytique du sphéroïde terrestre, n°. 9 du *Traité de Topog.*; c'est pourquoi je me bornerai à renvoyer le lecteur à cet ouvrage; mais j'observerai que l'équation (8) se présente souvent sous une forme très-simple, qu'il est très-utile de connaître. En effet, puisque la différentielle complète de $z$ est $dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy = p\,dx + q\,dy$, et que l'on a de même $dp = r\,dx + s\,dy$, $dq = s\,dx + t\,dy$, les valeurs de $r$ et de $t$, prises dans ces formules, et introduites dans l'équation (8), feront disparaître $s$; de sorte que l'on aura

$$dp\,(dy + q\,dz) = dq\,(dx + p\,dz). \qquad (8')$$

*Voyez*, pour le complément de cette théorie, le *Traité du cal. différent.* de Lacroix, tom. I, et l'*Applicat. de l'anal. à la géom.*, de Monge, *p.* 108.

166. Afin de généraliser le procédé du n°. 156, cherchons l'équation de la surface qui enveloppe à la fois une infinité d'autres surfaces; et, dans cette vue, supposons, pour plus de simplicité, qu'il s'agisse de trouver l'*enveloppe* d'une suite de sphères décrites du même rayon, et dont les centres sont situés sur une courbe tracée dans le plan $xy$.

Si $\alpha$, $\beta$ sont les coordonnées des points de cette courbe, on aura, pour son équation,

$$\beta = f(\alpha);$$

et celle de la surface de toutes les sphères que l'on considère, sera

$$(x-\alpha)^2 + (y-f(\alpha))^2 + z^2 = r^2;$$

$r$ dénotant le rayon.

Cela posé, si $\alpha$ varie d'une quantité infiniment petite $d\alpha$, la nouvelle abscisse $\alpha + d\alpha$ sera celle du centre de la sphère qui, par sa position, différera infiniment peu de la première; alors ces deux sphères se couperont suivant un cercle qui appartiendra en même tems à l'enveloppe cherchée, et dont les coordonnées de ses points ne varieront pas en passant de la première à la seconde sphère. Donc, si on différencie l'équation précédente, par rapport à $\alpha$ seulement, celle que l'on obtiendra appartiendra à la courbe de contact dont il s'agit. Les deux équations de cette courbe seront donc

$$(x-\alpha)^2 + (y-f(\alpha))^2 + z^2 = r^2,$$

et

$$(x-\alpha) + (y-f(\alpha))\frac{d.f(\alpha)}{d\alpha} = 0.$$

Soit, en général, $U = 0$ l'équation des surfaces enveloppées, $\alpha$ étant une constante ou un *paramètre* qui concourt à leur génération; les équations de la courbe de contact de l'enveloppe avec les deux enveloppées consécutives seront

$$U = 0, \qquad (A)$$

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0; \qquad (B)$$

donc, si on élimine entre elles le paramètre $\alpha$ qui particularise la courbe de contact, l'équation résultante en $x$, $y$, $z$, et en constantes indépendantes de $\alpha$, sera celle de l'enveloppe elle-même.

M. Monge a donné à la courbe de contact, dont les équations sont $(A)$ et $(B)$, le nom de *caractéristique* de l'enveloppe ou de la surface limite, parce qu'elle imprime à cette surface un caractère indépendant de la nature de la courbe $\beta = f(\alpha)$, qui fixe la loi de succession de toutes les surfaces enveloppées. Par exemple, quelle que soit la courbe des centres de toutes les sphères considérées ci-dessus, les caractéristiques n'en seront pas moins des cercles.

Il suit de là qu'en passant de la seconde à la troisième enveloppe, pour obtenir une nouvelle caractéristique, $\alpha$ doit, dans les équations $(A)$ et $(B)$, varier d'une quantité infiniment petite $d\alpha$: cette seconde caractéristique sera donc donnée par

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0, \qquad (C)$$

$$\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right) = 0; \qquad (D)$$

or, celles-ci coupant en général la première, il en résulte que, pour chacun des points d'intersection de ces deux courbes,

$$U = 0, \quad \left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right) = 0.$$

Tant que l'on attribuera au paramètre $\alpha$ une valeur particulière, ces trois équations ne donneront que les coordonnées des points communs aux deux caractéristiques consécutives qui résultent de cette valeur ; mais en éliminant $\alpha$ entre $(A)$, $(B)$, $(C)$, on aura en $x$, $y$, $z$ deux équations qui appartiendront à la courbe formée par le système des points d'intersection que l'on considère, et qui sera touchée par toutes les caractéristiques, de même que l'enveloppe est touchée par toutes les enveloppées : cette courbe est l'*arête de rebroussement* de l'enveloppe, parce qu'elle la sépare en deux nappes distinctes.

S'il arrivait que trois caractéristiques consécutives se rencontrassent, ou que deux caractéristiques vinssent à coïncider, les quatre équations

$$U=0, \quad \left(\frac{dU}{d\alpha}\right)=0, \quad \left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right)=0, \quad \left(\frac{d^3U}{d\alpha^3}\right)=0,$$

auraient nécessairement lieu à la fois ; or, en éliminant entre elles $x$, $y$, $z$, on obtiendra une équation unique, qui ne renfermera plus que $\alpha$, et à l'aide de laquelle on pourra trouver le point de l'arête de rebroussement commun à trois caractéristiques consécutives. Cette théorie est traitée à fond dans l'ouvrage cité, de Monge : nous nous contentons d'en donner ici une idée.

167. Résolvons actuellement le problème suivant, à cause de son analogie avec ce qui précède : *déterminer tous les plans qui retranchent d'un angle trièdre une pyramide équivalente à un volume* V *donné.*

Nous imiterons la solution du cas particulier traité au n°. 158, et, à cet effet, nous prendrons, pour équation

générale des plans cherchés,

$$Ax + By + Cz = \rho ; \qquad (1)$$

les intersections des trois plans qui forment l'angle trièdre étant prises pour les axes des coordonnées. L'un de ces plans cherchés coupera ces axes en des points dont les distances à l'origine seront,

$$x = \frac{\rho}{A}, \qquad y = \frac{\rho}{B}, \qquad z = \frac{\rho}{C};$$

et, par la théorie du n°. 149, le volume donné aura pour expression

$$V = \frac{\rho^3 R}{6\,ABC}, \qquad \text{d'où } A = \frac{\rho^3 R}{6\,BCV}.$$

L'équation (1) se change donc en celle-ci:

$$\rho^3 Rx + 6\,B^2CVy + 6\,BC^2Vz = 6\,BCV\rho. \qquad (2)$$

En la différenciant, par rapport à $B$ et à $C$ seulement, la position consécutive à celle qui résulte de cette équation sera donnée par

$$(2By + Cz - \rho) + (2Cz + By - \rho)\frac{dC}{dB} = 0, \qquad (3)$$

ou, ce qui est la même chose, ces deux dernières équations seront celles de la commune section de deux plans consécutifs. La position de cette droite dépendant de la valeur du rapport $\frac{dC}{dB}$, et ce rapport variant nécessairement lorsque la situation du plan (1) change, il

s'ensuit qu'en différenciant l'équation (3) dans l'hypothèse que $\frac{dC}{dB}$ est la seule variable, on aura ces deux autres équations

$$2By + Cz = \rho, \qquad 2Cz + By = \rho, \qquad (4)$$

qui donneront la position d'une autre droite dont le point d'intersection avec la première sera sur une certaine surface courbe qu'il s'agit de déterminer.

Or, en vertu des équations (4), on a

$$C = \frac{\rho}{3z}, \qquad B = \frac{\rho}{3y};$$

et si on introduit ces valeurs dans l'équation (2), la surface courbe cherchée, qui sera touchée par tous les plans (1), en un point $x, y, z$, aura pour équation

$$xyz = \frac{2V}{9F}.$$

Cette surface sera donc hyperboloïdique.

Nous pourrions, comme au n°. 158, nous proposer de déterminer la position de la normale passant par l'origine des coordonnées, mais nous laisserons au lecteur le plaisir d'effectuer lui-même les calculs relatifs à cette solution. Nous observerons seulement qu'il faudrait pour cela employer quelques-unes des formules du n°. 113, et avoir égard à ce que

$$xyz' + yzx' + xzy' = 3xyz$$

est, n°. 129, l'équation du plan tangent à l'hyperbo-

loïde *cubique* que l'on vient d'obtenir. Alors ce plan, qui serait perpendiculaire à la normale dont il s'agit, retrancherait de l'angle trièdre donné une pyramide dont la base serait un *minimum*. C'est ce que M. Lefrançais a reconnu le premier, n°. 10 de la *Correspond. sur l'Ecole imp. polytech.*

# CHAPITRE II.

## *Recherche des équations de différentes surfaces, d'après la considération du plan tangent.*

### *Des surfaces cylindriques.*

168. QUELLE que soit la position du plan tangent à une surface cylindrique, ce plan sera toujours parallèle à la génératrice. Cela posé, soient

$$x' = az', \qquad y' = bz',$$

les équations d'une droite parallèle à cette génératrice, et passant par l'origine des coordonnées ; l'équation du plan tangent, mené par un point $x, y, z$ de la surface cylindrique, sera (n°. 163.)

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y).$$

Or, pour que ce plan, et la droite dont il s'agit, soient parallèles, il faut (n°. 111) que l'on ait, entre les coefficiens $a$, $b$, $p$, $q$, la relation

$$1 = ap + bq, \quad \text{ou} \quad 1 = a\left(\frac{dz}{dx}\right) + b\left(\frac{dz}{dy}\right), \quad (A)$$

laquelle exprime qu'une surface est cylindrique, sans cependant rien prononcer sur la nature de la courbe qui dirige le mouvement de la génératrice.

Pour appliquer ce résultat à un exemple, résolvons ce problème :

*Connaissant la direction de la génératrice, trouver l'équation de la surface cylindrique qui enveloppe une surface courbe donnée.*

Soit $F(x, y, z) = 0$, l'équation de la surface donnée; après en avoir tiré les valeurs des coefficiens différentiels $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, on les substituera dans l'équation différentielle $(A)$ des surfaces cylindriques, et l'équation résultante $f(x, y, z) = 0$ appartiendra à la courbe de contact; mais cette courbe étant aussi sur la surface donnée, il s'ensuit que ses deux équations seront

$$F(x, y, z) = 0,$$
$$f(x, y, z) = 0.$$

Il ne s'agit donc plus que d'opérer comme au n°. 125, pour avoir l'équation individuelle de la surface cylindrique circonscrite, puisque les équations de la génératrice sont connues.

### *Des surfaces coniques.*

169. Un des caractères des surfaces coniques, est que le plan qui leur est tangent passe toujours par leur sommet. Soient donc $a$, $b$, $c$ les coordonnées de ce point, et $x$, $y$, $z$ celles d'un autre point de la surface conique par lequel doit passer le plan tangent.

Ce plan a généralement pour équation

$$z' - z = (x' - x)\,p + (y' - y)\,q;$$

et comme il doit passer par le sommet du cône, on a

$$c - z = (a - x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (b - y)\left(\frac{dz}{dy}\right); \quad (A)$$

résultat qui exprime qu'une surface courbe est conique, sans néanmoins rien prononcer sur la nature de la courbe qui lui sert de base.

De là il est aisé de résoudre ce problême : *étant données les coordonnées du sommet, trouver l'équation de la surface conique individuelle circonscrite à une surface courbe donnée.*

La ligne suivant laquelle se touchent la surface donnée et la surface conique demandée, étant en général une courbe à double courbure, il faudra, pour en déterminer les équations, avoir égard à ce que, pour tous les points de cette courbe de contact, les deux surfaces ont le même plan tangent, et qu'ainsi les valeurs de ces coefficiens différentiels $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ déduites tant de l'équation de l'une de ces surfaces, que de l'équation de l'autre surface, sont respectivement les mêmes.

Cela posé, soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface enveloppée; on en tirera les valeurs de $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dy}\right)$; et après les avoir substituées dans l'équation $(A)$ des surfaces coniques, on aura une autre équation

en $x, y, z$, que l'on peut désigner par $f(x, y, z) = 0$; telles seront les équations de la courbe de contact, n°. 166. Procédant ensuite comme au n°. 126, on aura l'équation individuelle de la surface conique cherchée.

170. Afin de déduire de cette théorie quelques propriétés des surfaces du second degré, prenons, pour équation de la surface enveloppée,

$$Mz^2 + Ny^2 + Px^2 + 2Qz + 2Ry + 2Sx = 1 ; \quad (1)$$

forme sous laquelle peut être mise l'équation $(f)$ du n°. 121, et dénotons toujours par $abc$ les coordonnées du sommet de la surface conique. On tirera de là

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{Px + S}{Mz + Q}, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{Ny + R}{Mz + Q} ;$$

et l'équation $(A)$ de la surface conique deviendra, par la substitution de ces valeurs, et après avoir réduit à l'aide de la relation (1),

$$(Mc + Q)z + (Nb + R)y + (Pa + S)x + Qc + Rb + Sa + 1 = 0;$$

celle-ci, que l'on peut mettre sous cette forme :

$$\gamma c + \beta b + \alpha a + \delta = 0, \quad (3)$$

en faisant $\gamma = Mz + Q$, $\beta = Ny + R$, $\alpha = Px + S$, $\delta = Qy + Ry + Sx + 1$, appartient nécessairement à un plan, puisqu'elle est linéaire en $x$, $y$, $z$ : ainsi la courbe de contact d'une surface quelconque du second degré et d'une surface conique est toujours plane (*).

(*) Il est remarquable que l'équation (3) du plan de la courbe

Or, il est évident que ce plan est fixe dans l'espace, lorsque les coordonnées $a$, $b$, $c$ sont fixes elles-mêmes, mais que sa position varie, lorsque le sommet de la surface conique change de place. Supposons que ce point se meuve sur la surface

$$M'c^2 + N'b^2 + P'a^2 = 1. \qquad (4)$$

Si nous considérons deux positions consécutives du plan de la courbe de contact, résultantes des deux positions infiniment voisines du sommet du cône, les coordonnées $x$, $y$, $z$ de la droite d'intersection de ces deux plans seront constantes (n°. 166); mais $a$, $b$, $c$ auront varié toutes trois. Les équations de cette droite seront donc

$$\gamma c + \beta b + \alpha a + \delta = 0, \quad \gamma dc + \beta db + \alpha da = 0;$$

et pour exprimer que le sommet du cône ne quitte point la surface directrice (4), on aura encore, entre $da$, $db$, $dc$, cette relation

$$M'cdc + N'bdb + P'ada = 0.$$

Eliminant $dc$ entre celle-ci et la précédente, on trouvera

$$(M'\beta c - N'\gamma b)\,db + (M'\alpha c - P'\gamma a)\,da = 0.$$

La position de la droite dont il est question dépend de la valeur du rapport $\frac{da}{db}$, et, à cause de la liberté qu'a

---

de contact est la même que l'équation du plan tangent. On a vu, n°. 69, une particularité semblable pour les lignes courbes.

le sommet du cône de se mouvoir en tout sens sur la surface directrice, ce rapport est nécessairement arbitraire; par conséquent les coefficiens de $da$ et de $db$, dans cette dernière équation, doivent être nuls séparément; on a donc

$$M'\beta c - N'\gamma b = 0, \quad (5) \qquad M'\alpha c - P'\gamma a = 0. \quad (6)$$

Il résulte de là que les coordonnées $x$, $y$, $z$, déduites des équations (3), (5), (6), sont celles du point commun à trois plans de contact consécutifs quelconques, et que le lieu de tous les points pareils fournis par d'autres positions du sommet du cône enveloppant, est une surface touchée par le plan (3). Pour déterminer l'équation de cette surface, on éliminera $a$, $b$, $c$ entre les quatre équations (3), (4), (5), (6), ainsi qu'il suit.

On multipliera (5) et (6) respectivement par $b$ et $a$, et la somme des produits sera

$$(P'a^2 + N'b^2)\gamma = M'c(\alpha a + \beta b);$$

puis l'on ajoutera $M'\gamma c^2$ de part et d'autre, et l'on aura

$$(P'a^2 + N'b^2 + M'c^2)\gamma = M'c(\alpha a + \beta b + \gamma c);$$

et après avoir élevé tout au carré, il viendra, à cause des relations (3) et (4),

$$\gamma^2 = M'^2\delta^2c^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{\gamma^2}{M'^2c^2} = \delta^2.$$

D'un autre côté, les équations (5) et (6), élevées au carré, donneront

$$M'^2\beta^2c^2 = N'^2\gamma^2b^2, \quad M'^2\alpha^2c^2 = P'^2\gamma^2a^2,$$

et par conséquent

$$\frac{\beta^2}{N'} = \frac{N'\gamma^2 b^2}{M'^2c^2}, \qquad \frac{\alpha^2}{P'} = \frac{P'\gamma^2 a^2}{M'^2c^2}.$$

Faisant une somme de ces dernières et de l'équation identique $\frac{\gamma^2}{M'} = \frac{\gamma^2}{M'}$, il viendra, toutes réductions faites,

$$\frac{\gamma^2}{M'} + \frac{\beta^2}{N'} + \frac{\alpha^2}{P'} = \frac{\gamma^2}{M'^2c^2};$$

mais $\frac{\gamma^2}{M'^2c^2} = \delta^2$; donc

$$N'P'\gamma^2 + M'P'\beta^2 + M'N'\alpha^2 = M'N'P'\delta^2; \quad (7)$$

résultat indépendant de $a$, $b$, $c$, et qui est du second degré en $x$, $y$, $z$, puisque $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont des fonctions linéaires de ces variables. Donc, *si une surface conique touche et enveloppe constamment une surface courbe quelconque du second degré, pendant que son sommet parcourt une autre surface du second degré située comme on voudra dans l'espace, mais douée d'un centre, le plan de la courbe de contact des deux surfaces touchera toujours une troisième surface du second degré.*

Ceux qui voudront savoir comment il est possible d'extraire de la théorie précédente, due à M. Monge, d'autres propriétés curieuses des surfaces du second ordre, pourront consulter les Mémoires de MM. Livet et Brianchon, insérés dans le 13e. cahier du *Journal de l'Ecole polytechnique*. Nous nous contenterons d'énoncer les deux propositions suivantes, que M. Monge a démontrées le premier :

1°. *Tout étant égal d'ailleurs, comme ci-dessus, si le sommet du cône circonscrit se meut en ligne droite, le*

*plan de la courbe de contact passera toujours par une même ligne droite : 2°. si le sommet est dirigé par une surface plane, le plan de la courbe de contact passera toujours par un même point.*

### *Des surfaces de révolution.*

171. C'est un caractère distinctif des surfaces de révolution, quelle que soit d'ailleurs la nature de la courbe génératrice, que le plan tangent est toujours perpendiculaire au plan mené par l'axe de rotation et par le point de contact.

Cela posé, soient

$$x' = Az' + a,$$
$$y' = Bz' + b,$$

les équations données de l'axe de révolution, et $xyz$ les coordonnées du point de contact. L'équation du plan du méridien, c'est-à-dire de la section faite par l'axe et assujétie à passer par le point de contact, est de la forme suivante (n°. 106) :

$$z' - z = M(x' - x) + N(y' - y) : \quad (m)$$

or, l'axe coïncidant avec cette section, il est évident que, pour tous les points qui leur sont communs, les coordonnées sont les mêmes ; les trois équations précédentes doivent donc avoir lieu en même tems ; et, en vertu du n°. 111, il faut que l'on ait la relation

$$AM + BN = 1.$$

Mais les équations de l'axe pouvant être écrites ainsi :

$$x' - x = A(z' - z) + a - x + Az,$$
$$y' - y = B(z' - z) + b - y + Bz,$$

on en tire

$$\text{et} \quad \left.\begin{aligned} a - x + Az &= (x' - x) - A(z' - z) \\ b - y + Bz &= (y' - y) - B(z' - z) \end{aligned}\right\} \quad (n)$$

D'ailleurs, si, entre ces mêmes équations, l'on élimine $z$, on obtiendra

$$(x' - x)B - (y' - y)A = (a - x)B - (b - y)A;$$

équation qui, à cause de la relation $AM + BN = 1$, peut être mise sous ces deux formes :

$$(1 - AM)(x' - x) - (y' - y)AN = N[(a - x)B - (b - y)A],$$
$$(1 - BN)(y' - y) - (x' - x)BM = M[(b - y)A - (a - x)B];$$

et si, dans les équations $(n)$, on substitue pour $z' - z$ sa valeur $(m)$, on aura

$$\begin{aligned} a - x + Az &= (x' - x) - AM(x' - x) - AN(y' - y) \\ &= (x' - x)(1 - AM) - AN(y' - y), \\ b - y + Bz &= (y' - y) - BM(x' - x) - BN(y' - y) \\ &= (y' - y)(1 - BN) - BM(x' - x). \end{aligned}$$

Donc, en rapprochant ces deux équations des deux précédentes, on conclura que

$$M[A(b - y) - B(a - x)] = b - y + Bz,$$
$$N[A(b - y) - B(a - x)] = -(a - x + Az);$$

ainsi l'équation $(m)$ du plan du méridien mené par le point de contact, est

$$(z'-z)[A(b-y)-B(a-x)]=(b-y+Bz)\times\ldots\ldots$$
$$(x'-x)-(a-x+Az)(y'-y);$$

et comme celle du plan tangent est (n°. 163),

$$z'-z=(x'-x)\left(\frac{dz}{dx}\right)+(y'-y)\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

il résulte, du n°. 110, que, si ces deux plans sont perpendiculaires entre eux, on aura

$$(b-y+Bz)\left(\frac{dz}{dx}\right)-(a-x+Az)\left(\frac{dz}{dy}\right)$$
$$+A(b-y)-B(a-x)=0: \qquad (A)$$

cette relation exprime donc qu'une surface est de révolution autour d'un axe déterminé de position par les constantes $A$, $B$, $a$, $b$, indépendamment de la génératrice.

Indiquons maintenant la solution de ce problême : *une surface courbe dont l'équation est donnée, étant liée d'une manière invariable à un axe de révolution, et tournant ensuite autour de cet axe, trouver l'équation de la surface qui touche et enveloppe la surface mobile dans toutes ses positions.*

La surface cherchée est nécessairement de révolution autour de l'axe donné, et la ligne suivant laquelle elle touche la surface mobile considérée dans sa première position, est une courbe dont il suffira d'avoir les équations ; car alors la question rentrera dans celle qui a été traitée au n°. 127.

Soit donc $F(x, y, z)=0$ l'équation donnée de la

surface mobile, considérée dans sa position initiale. Cette équation doit satisfaire à celle des surfaces de révolution; donc, si on en tire les valeurs des coefficiens différentiels $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, et qu'on les substitue dans l'équation $(A)$, la résultante $f(x, y, z) = 0$ appartiendra à la courbe de contact; ainsi les deux équations de cette courbe seront

$$F(x, y, z) = 0,$$
$$f(x, y, z) = 0;$$

et en opérant comme au n°. cité, on aura l'équation de la surface individuelle cherchée.

Nous n'entrerons pas dans de plus grands détails sur les propriétés des courbes à double courbure et des surfaces courbes, parce que le lecteur, qui veut s'instruire plus particulièrement sur cette matière, doit étudier l'*Application de l'analyse à la géométrie*, par M. Monge; ouvrage qui est un des plus beaux monumens du génie, et où la plus haute analyse se manifeste dans toute sa puissance.

# CHAPITRE III.

## *Solutions de quelques problèmes de* MAXIMIS *et* MINIMIS.

172. LES solutions du petit nombre de problèmes suivans m'ont paru assez simples et assez élégantes pour être publiées dans ce Recueil : elles sont fondées sur les théories des n^os^. 47 et 133 du *Traité de Calcul différent. élém.*, de Lacroix.

### PROBLÈME.

*Par un point* M′ *donné dans l'intérieur d'un angle* MAN, *mener une droite* MN, *de manière que sa longueur* MN, *comprise entre les deux côtés de cet angle, soit un* minimum.

[Fig. 97.] Prenons pour axe des $x$ la droite $AX$, qui divise l'angle donné $MAN$ en deux parties égales; et soit $M'M = z$, $M'N = z'$, l'angle $R = \varphi$; puis dénotons par $x, y$ les coordonnées rectangles du point $M$, par $x', y'$ celles du point $M'$.

L'équation de $AM$ étant $y = ax$, celle de la droite $AN$ qui est placée de la même manière au-dessous de

l'axe des $x$ sera $y = -ax$ : or, si l'on transporte l'origine des axes au point $M'$, sans changer leurs directions, on aura (n°. 40),

$$AP = x = x' + z\cos\varphi,$$
$$PM = y = y' + z\sin\varphi;$$

et par conséquent l'équation $y = ax$ deviendra

$$y' + z\sin\varphi = a(x' + z\cos\varphi),$$

ainsi

$$z = \frac{ax' - y'}{\sin\varphi - a\cos\varphi}.$$

Pour trouver $M'N$ ou $z'$, on voit bien qu'il suffit de prendre $a$ négativement dans ce résultat ; on a donc sur-le-champ

$$z' = \frac{-ax' - y'}{\sin\varphi + a\cos\varphi} :$$

en sorte que si on ajoute ces deux valeurs, prises positivement, on obtiendra

$$z + z' = \frac{2a(x'\sin\varphi - y'\cos\varphi)}{\sin^2\varphi - a^2\cos^2\varphi}.$$

Egalant à zéro le coefficient différentiel de cette expression dans laquelle $\varphi$ est seul variable, afin d'établir la condition du *minimum*, on aura

$$(x'\cos\varphi + y'\sin\varphi)(\sin^2\varphi - a^2\cos^2\varphi)$$
$$+ 2(y'\cos\varphi - x'\sin\varphi)(\sin\varphi\cos\varphi + a^2\sin\varphi\cos\varphi) = 0; \quad (1)$$

puis divisant tout par $\cos^3\varphi$, et développant, on trouvera

$$\text{tang}^3\varphi - x'\frac{(2a^2+1)}{y'}\text{tang}^2\varphi + (a^2+2)\text{tang}\varphi - \frac{a^2x'}{y'} = 0. \quad (2)$$

Cette équation donne nécessairement une racine réelle dans le cas général, puisqu'elle est du troisième degré; mais lorsque $y' = 0$, le premier et le troisième terme disparaissant, on a simplement

$$\text{tang}^2\varphi = -\frac{a^2}{2a^2+1},$$

c'est-à-dire, qu'alors l'équation (2) ne fournit aucune racine réelle. Cependant il ne faudrait pas conclure de là que le problème proposé n'est pas susceptible de *minimum*, dans l'hypothèse actuelle; car, si on remonte à l'équation (1) dont celle (2) dérive, et que l'on y fasse $y' = 0$, elle se réduira à

$$\cos\varphi(\sin^2\varphi - a^2\cos^2\varphi) - 2\cos\varphi\sin^2\varphi(1+a^2) = 0,$$

et sera évidemment satisfaite par $\cos\varphi = 0$, ou par $\varphi = 100^{gr}$. Pour faire disparaître cet inconvénient, et rendre la formule (2) aussi générale que le comporte le problème, nous la changerons en une autre dans laquelle il n'y ait plus de dénominateur, et où, cependant, le premier terme n'ait que l'unité pour coefficient. A cet effet, nous ferons, comme l'on sait, $\text{tang}\varphi = \frac{u}{y'}$, $u$ étant une nouvelle inconnue, et il viendra, après la substitution de cette valeur,

$$u^3 - x'(2a^2+1)u^2 + (a^2+2)y'^2u - a^2x'y'^2 = 0. \quad (3)$$

Soit maintenant $y' = 0$, on aura

$$u = x'(2a^2 + 1);$$

et, par suite,

$$\text{tang}\,\phi = \frac{x'(2a^2+1)}{y'} = \infty;$$

c'est-à-dire que quand le point $M'$ est sur l'axe des $x$, la droite *minimum* cherchée $mn$, est perpendiculaire à cet axe.

Si, au contraire, $y' = ax'$, auquel cas le point $M'$ se confond avec le point $m$, la formule (3) se change en celle-ci :

$$u^3 - x'(2a^2+1)u^2 + (a^2+2)a^2x'^2u - a^4x'^3 = 0;$$

et par la méthode des diviseurs commensurables, on obtient aisément

$$u = x', \quad \text{ou} \quad \text{tang}\,\varphi = \frac{x'}{ax'} = \frac{1}{a}.$$

Il suit de ce résultat, et du (n°. 35), que la droite *minimum*, partant d'un des points des côtés de l'angle $AMN$, doit être perpendiculaire à l'autre côté.

Enfin, si on avait seulement $x = 0$, l'équation (3) se réduirait à

$$u\{u^2 + (a^2+2)y'^2\} = 0,$$

et serait satisfaite par $u = 0$, ou par $\text{tang}\,\phi = \frac{0}{y'} = 0$;

ainsi, lorsque le point par lequel doit passer la droite *minimum* est donné sur l'axe des $y$, cette droite est parallèle à l'axe des $x$, et rencontre les côtés de l'angle qui est le supplément de $MAN$.

Les autres particularités du problême se déduiraient avec la même facilité de l'équation (3).

On pourrait se proposer un problême analogue, dans l'espace : ce serait de *déterminer le plan* minimum *passant par un point donné dans un angle trièdre, et limité par les trois faces de cet angle.*

## PROBLÈME.

173. *Déterminer la plus courte distance entre deux droites données dans l'espace.*

La propriété dont jouit cette ligne, c'est d'être à la fois perpendiculaire aux deux droites données. Quoique cela se prouve très-simplement par la géométrie élémentaire, voici comment l'analyse conduit au même but, et de quelle manière on parvient en même tems à l'expression de la plus courte distance cherchée.

Soient

$$\left.\begin{array}{ll} x = az + \alpha, & x' = a'z' + \alpha' \\ y = bz + \beta, & y' = b'z' + \beta' \end{array}\right\} \quad (1)$$

les équations des projections verticales des deux droites données : la distance entre les deux points $xyz$, $x'y'z'$ aura, pour expression (n°. 102),

$$u = \sqrt{(\alpha - \alpha' + az - a'z')^2 + (\beta - \beta' + bz - b'z')^2 + (z - z')^2}. \quad (2)$$

Cette quantité devant être un *minimum*, il faut que ses différentielles, prises successivement par rapport à $z$ et à $z'$, soient nulles, à cause de l'indépendance de ces variables : ainsi on aura, pour les déterminer, les équations

$$\frac{du}{dz}=(z-z')+a\,(\alpha-\alpha'+az-a'z')+b\,(\beta-\beta'+bz-b'z')=0, \quad (3)$$

$$\frac{du}{dz'}=(z-z')+a'(\alpha-\alpha'+az-a'z')+b'(\beta-\beta'+bz-b'z')=0. \quad (4)$$

Il est d'abord facile de s'assurer que ces équations répondent au *minimum* demandé, car on trouverait que la condition

$$\frac{d^2u}{dz^2}\cdot\frac{d^2u}{dz'^2}-\left(\frac{d^2u}{dzdz'}\right)^2>0$$

est remplie (n°. 134 du *Calc. diff. élém.* L. C.). Ensuite, pour parvenir à la propriété énoncée, on observera que la droite *minimum* devant passer par les points $xyz$, $x'y'z'$, ses équations sont de la forme

$$\left.\begin{aligned} x-x'&=a''(z-z')\\ y-y'&=b''(z-z')\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

ou, à cause des valeurs de $x$, $x'$, $y$, $y'$, tirées des équations (1), on a

$$\left.\begin{aligned} (\alpha-\alpha'+az-a'z')&=a''(z-z')\\ (\beta-\beta'+bz-b'z')&=b''(z-z')\end{aligned}\right\} \quad (5')$$

de là les formules (3) et (4) se réduisent respectivement à

$$1+aa''+bb''=0, \qquad 1+a'a''+b'b''=0.$$

Ces relations expriment donc (n°. 105) que la droite *minimum* est en même tems perpendiculaire aux deux droites données, et l'on en tire

$$a'' = \frac{b' - b}{a'b - ab'}, \qquad b'' = \frac{a - a'}{a'b - ab'}. \qquad (6)$$

Actuellement, si on résout les équations (3) et (4), par rapport aux inconnues $z$, $z'$, on obtiendra

$$z - z' = -\frac{(a'b - ab')\{(b - b')(\alpha - \alpha') - (a - a')(\beta - \beta')\}}{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (a'b - ab')^2};$$

mais l'expression (2) devient, en vertu des formules (5′) et (6),

$$u = \frac{(z - z')}{a'b - ab'} \sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (a'b - ab')^2};$$

et en y substituant pour $z - z'$ sa valeur précédente, on a

$$u = -\frac{(b - b')(\alpha - \alpha') - (a - a')(\beta - \beta')}{\sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (a'b - ab')^2}};$$

résultat conforme à celui auquel on parvient par des considérations purement élémentaires. (*Voy.* l'*Appl. de l'alg. à la géom. des surfaces*, par MM. Monge et Hachette, probl. IV.)

## PROBLÈME.

174. *Déterminer la route la plus courte pour aller d'un point à un autre, en passant par un plan donné de position à l'égard de ces points.*

Dans la question précédente, les plans coordonnés sont situés d'une manière quelconque, par rapport aux droites

données ; mais il est des cas, comme à présent, où telle position de ces plans, à l'égard des objets que l'on considère dans l'espace, est plus propre que toute autre pour mettre en évidence certaines propriétés de l'étendue ; c'est de quoi l'on a été à même de se convaincre dans le cours de cet Ouvrage.

Soit donc pris, pour plan des $xy$ le plan donné, et pour celui des $xz$, le plan qui passe par les deux points donnés. Dans cette hypothèse admissible, les coordonnées du point $M'$ [Fig. 98.] sont

$$x = x', \quad y = 0, \quad z = z';$$

celles de l'autre point $M''$ sont

$$x = x'', \quad y = 0, \quad z = z'';$$

et en supposant, pour le moment, que le point $N$ du plan $xy$ soit celui qui satisfait au *minimum* demandé, point dont les coordonnées sont $x$, $y$, on aura

$$M'N + M''N = \sqrt{(x-x')^2 + y^2 + z'^2} + \sqrt{(x-x'')^2 + y^2 + z''^2} = \sqrt{P} + \sqrt{P'}.$$

Comme les variables $x$ et $y$ sont indépendantes, les différentielles successives de cette expression donneront

$$\frac{x - x'}{\sqrt{P}} + \frac{x - x''}{\sqrt{P'}} = 0,$$

$$\frac{y}{\sqrt{P}} + \frac{y}{\sqrt{P'}} = 0.$$

Pour que cette dernière équation soit satisfaite, il faut que $y$ soit nulle ; ainsi la route la plus courte demandée,

est $M'N' + N'M''$, c'est-à-dire qu'elle est toute entière dans un plan perpendiculaire au plan donné $xy$. Alors, l'avant-dernière équation se réduit à

$$\frac{x - x'}{\sqrt{(x - x')^2 + z'^2}} = \frac{x'' - x}{\sqrt{(x'' - x)^2 + z''^2}};$$

donc, $\cos M'N'A = \cos M''N'X$; donc, les deux lignes $M'N'$, $N'M''$ font le même angle avec le plan $xy$, ou avec la perpendiculaire $N'R$ à ce plan, comme on le démontre d'une autre manière en mécanique.

Il résulte de là que la plus courte distance d'un point à une autre, en passant par une surface courbe, est représentée par une ligne brisée située dans un plan normal à cette surface.

## PROBLÈME.

175. *Déterminer la plus courte distance de deux points mobiles dont on connaît les positions initiales, et qui se meuvent uniformément sur deux droites données dans l'espace.*

Je ne sache pas qu'aucun auteur de mécanique élémentaire ait résolu ce problème d'une manière générale; cependant il est susceptible de l'être élégamment par la pure géométrie; et, en se conformant à la remarque qui se trouve au commencement du n°. précédent, l'analyse algébrique est très-propre à faire découvrir la solution graphique fort simple dont ce problème est susceptible.

Pour cet effet, choisissons la position des plans coordonnés, de manière que les équations des deux droites données dans l'espace soient les plus simples possibles:

or, c'est ce qui arrivera infailliblement en prenant 1°. pour plan des $xy$ celui qui contient une des droites dont il s'agit, et qui est en même tems parallèle à l'autre droite; 2°. pour plan des $xz$ celui qui passe par cette autre droite, et qui est en outre perpendiculaire au plan des $xy$.

[Fig. 99.] Maintenant, soient $MM'$, $mm'$ les droites données; la première étant située dans le plan des $xy$, et la seconde se trouvant dans celui des $xz$, parallèle à l'axe des $x$, les équations de $MM'$ seront évidemment

$$y = -\tang\varphi.x + b, \qquad z = 0;$$

et celles de la droite $mm'$,

$$y = 0, \qquad z = z'.$$

Supposons que les points mobiles se trouvant actuellement, l'un en $M$, dont les coordonnées sont $\alpha$, $\beta$, et l'autre en $m$ sur l'axe des $x$, se meuvent de $A$ vers $X$, avec des vîtesses uniformes qui soient entre elles comme $q : p$; alors si $M'm'$ est la plus courte distance à laquelle se trouveront ces deux mobiles, que les coordonnées du point $M'$ soient désignées par $\alpha'$, $\beta'$, et celles du point $m'$ par $x'$, $z'$, on aura en général

$$M'm' = u = \sqrt{(x' - \alpha')^2 + \beta'^2 + z'^2}.$$

Mais les espaces parcourus $mm'$, $MM'$ étant entre eux comme les vîtesses $p$ et $q$, on a $MM' = \frac{qx}{p}$, et parce que l'angle formé par la droite $MM'$ et l'axe des $x$ est $= \varphi$, on a en outre

$$\alpha' = \alpha + \frac{qx'}{p}\cos\varphi, \quad \beta' = \beta - \frac{qx'}{p}\sin\varphi.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'expression précédente de $u$, et que l'on égale à zéro la différentielle de cette expression, prise par rapport à $x'$, on obtiendra une équation de laquelle on tirera

$$x' = \frac{\alpha(p^2 - pq\cos\varphi) + \beta pq\sin\varphi}{p^2 + q^2 - 2pq\cos\varphi},$$

ou bien

$$x' = \frac{p}{r} \times \frac{\alpha(p - q\cos\varphi) + \beta q\sin\varphi}{r},$$

en faisant, pour abréger, $p^2 + q^2 - 2pq\cos\varphi = r^2$.

La valeur de $r$ peut être construite très-simplement, car elle représente la base d'un triangle dont les deux autres côtés, formant l'angle $\varphi$, sont $p$ et $q$. Si donc, par un point quelconque $G$ de la droite $MM'$, on mène $GF$ parallèle à $mm'$, et que l'on prenne $GF$ de manière que $MG$ et $GF$ soient dans le rapport de $q$ à $p$, la ligne $MF$ sera de la valeur de $r$.

Il suit de là qu'en prolongeant $MF$, et faisant... $MR = \frac{\alpha(p - q\cos\varphi) + \beta q\sin\varphi}{r}$, la droite $RM'$, menée parallèlement à $FG$, sera $= x'$; et il est remarquable que la droite $mR$ sera perpendiculaire à $MF$, et égale à la plus courte distance cherchée. Or, si cette circonstance a lieu, il est évident que la droite $AR$, qui est la projection de $mR$, sera elle-même perpendiculaire à $MF$. Il est facile de prouver cette propriété; car

$$\sin D = \frac{q \sin \varphi}{r}, \qquad \cos D = \frac{p - q \cos \varphi}{r};$$

par suite,

$$DP = \frac{\beta (p - q \cos \varphi)}{q \sin \varphi}, \quad DM = \frac{\beta r}{q \sin \varphi}, \quad AD = DP - \alpha;$$

et, si $AR$ n'est pas perpendiculaire à $DM$, soit $Ar$ cette perpendiculaire, alors on trouvera que

$$Dr = \left( \frac{\beta (p - q \cos \varphi)}{q \sin \varphi} - \alpha \right) \left( \frac{p - q \cos \varphi}{r} \right);$$

et ensuite on aura

$$Mr = DM - Dr = \frac{\alpha (p - q \cos \varphi) + \beta q \sin \varphi}{r};$$

donc, $MR = Mr$; donc, $AR$ et $mR$ sont réellement perpendiculaires à $MD$.

Au surplus on reconnaît sur-le-champ cette vérité, parce qu'en général $mF$ mesure la distance des deux mobiles : en effet, lorsque le premier $M$ est arrivé en $G$, le second $m$ a parcouru, sur $mm'$, un espace $mg$ égal à $GF$; la figure $mFGg$ est donc un parallélogramme; et puisque de toutes les droites $mF$ menées du point $m$ à la droite $MD$, la plus courte est la perpendiculaire $AR$, celle-ci est nécessairement la plus courte distance cherchée.

## PROBLÈME.

176. *Parmi tous les quadrilatères que l'on peut former avec quatre lignes données, trouver celui qui a la plus grande surface.*

Soient $a$, $b$, $c$, $d$ les quatre côtés d'un quadrilatère, $a$ et $b$ deux côtés consécutifs, et $\varphi$ l'angle qu'ils forment; enfin, soit $\theta$ l'angle déterminé par les deux autres côtés. On aura, en désignant par $x$ la diagonale du quadrilatère opposée à $\varphi$,

$$\text{surf. } (abx) = \frac{ab}{2} \sin \varphi,$$

$$\text{surf. } (bcx) = \frac{cd}{2} \sin \theta;$$

par conséquent la surface du quadrilatère sera

$$s = \frac{ab \sin \varphi}{2} + \frac{cd \sin \theta}{2}. \qquad (1)$$

D'un autre côté, les deux triangles dont se compose cette surface, donnant

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi,$$
$$x^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \theta,$$

on a cette autre équation,

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi = c^2 + d^2 - 2cd \cos \theta : \qquad (2)$$

ainsi, pour trouver la surface *maximum*, on égalera à

zéro la différentielle de la valeur de $s$, en faisant varier à la fois $\varphi$ et $\theta$, puisque ces deux angles sont fonction l'un de l'autre ; et l'on substituera dans cette différentielle, divisée par $d\theta$, la valeur du rapport $\frac{d\varphi}{d\theta}$ tirée de l'équation (2) ; ce qui donnera une relation entre les angles $\varphi$ et $\theta$, convenable au *maximum* demandé ; ou bien l'on procédera ainsi qu'il suit.

De l'équation (1) l'on déduit

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = -\frac{cd\cos\theta}{ab\cos\varphi},$$

et de celle (2) l'on obtient

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{cd\sin\theta}{ab\sin\varphi};$$

prenant la différence de ces deux valeurs, et réduisant, il vient

$$\frac{ds}{d\theta} = \sin\theta\cos\varphi + \sin\varphi\cos\theta = \sin(\theta+\varphi) = 0;$$

donc, les angles $\theta$ et $\varphi$ sont supplément l'nn de l'autre ; donc, de tous les quadrilatères isopérimètres, dont les longueurs des côtés sont invariables, le plus grand est celui qui est inscriptible. Cette proposition est un cas particulier du théorême 6, livre IV, de la *Géométrie* de Legendre.

## PROBLÈME.

177. [Fig. 100.] *Dans un quart d'hémisphère supposé avoir pour base le quart de cercle* ABC, *pratiquer une ouverture rectangulaire* APMQ, *dont le volume soit un* maximum.

Soient $x$, $y$ les coordonnées du point $M$, et le rayon $AB$ ou $AC = r$; on aura $PB = r - x$ et $CQ = r - y$. Or, on sait, par les élémens de géométrie, que le volume du quart d'hémisphère du rayon $r$ a pour expression $\frac{\pi r^3}{6}$, $\pi$ étant le rapport de la circonférence au diamètre, et que le volume du quart de segment sphérique dont la base est $MPB$ a pour valeur $\frac{\pi (r-x)^2}{4}\left(r - \frac{r-x}{3}\right)$; conséquemment le quart de segment sphérique $CQM$ aura pour valeur $\frac{\pi (r-y)^2}{4}\left(r - \frac{r-y}{3}\right)$. Mais le volume de l'ouverture $APMQ$ étant évidemment la différence du quart d'hémisphère $ACB$ à la somme des deux quarts de segment $PMB$, $CMQ$, on a, en dénotant ce volume par $V$,

$$V = \frac{\pi r^3}{6} - \frac{\pi (r-x)^2}{4}\left[r - \frac{r-x}{3}\right] - \frac{\pi (r-y)^2}{4}\left[r - \frac{r-y}{3}\right].$$

Egalant à zéro la différentielle de cette expression, il vient, après les réductions,

$$dV = x^2 dy + y^2 dx = 0.$$

D'un autre côté, à cause de $x^2 + y^2 = r^2$, on a

$$xdx + ydy = 0;$$

partant

$$\frac{dV}{dx} = y^3 - x^3 = 0.$$

Ce résultat répond nécessairement au *maximum* demandé, car le coefficient différentiel $\frac{d^2V}{dx^2}$ est négatif, comme cela est aisé à vérifier; ainsi puisque l'ouverture $APMQ$ doit être un carré, le point $M$ sera le milieu du quart de circonférence $CMB$.

## PROBLÈME.

178. *Déterminer quel doit être l'angle du losange que présente le fond des alvéoles des abeilles, et l'inclinaison que doit former cette face avec la base de l'alvéole, pour que la surface latérale du prisme et de ses fonds soit la plus petite possible.* [Fig. 102.]

Les alvéoles des abeilles sont de petites cellules qui ont la forme d'un prisme hexagonal $A'C$, dont les six faces latérales sont des trapèzes $CC'B'b$, ..... et dont le fond se compose de trois losanges $CSAb$, ..... qui, par leur réunion, forment un angle trièdre $S$; et il y a cela de remarquable, que les deux rangs d'alvéoles qui composent ces gâteaux de miel sont adossés les uns aux autres, et disposés de manière que l'axe d'un alvéole s'aligne avec la jointure commune des trois postérieurs, ainsi que le représente la figure 101 : ce qui était nécessaire

pour donner lieu à l'arrangement de leurs fonds communs.

Cela posé, soit mené, par la diagonale $AC$ qui joint les extrémités de deux arêtes égales $AA'$, $CC'$, un plan $CBA$ parallèle à la base hexagonale régulière $A'B'C'$... Il résultera de là le prisme triangulaire $ACBA'C'B'$ à bases parallèles ; et si l'on joint le point $S$ au centre $P$ de l'hexagone $A'B'C'$..... la partie $SP = Bb$ de l'axe de l'alvéole sera la hauteur de la pyramide $ACPS$. Quelle que soit donc l'inclinaison $SOP$ du plan $SCb$ sur le plan $PCB$, ou sur celui de la base hexagonale de l'alvéole, les deux pyramides $ACPS$, $ACBb$ seront toujours équivalentes, et par conséquent le volume de l'alvéole sera toujours le même : quant à sa surface, elle variera nécessairement avec l'angle $SOP$. Voici le moyen de trouver la valeur de cet angle, pour que cette surface soit un *minimum*, comme dans le cas de la nature.

Soit l'angle $SOP = \theta$, prenons, pour unité de longueur, le côté de l'hexagone régulier $A'B'C'$....., et désignons par $h$ la plus longue arête $AA'$. Le triangle $BOb$ étant rectangle en $B$, on aura

$$Ob = OS = \frac{BO}{\cos\theta} = \frac{1}{2\cos\theta},$$

$$Bb = SP = \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\theta ;$$

d'où

$$B'b = h - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\theta :$$

ainsi l'aire du trapèze $CC'B'b$ sera $= \frac{1}{2}(2h - \frac{1}{2}\operatorname{tang}\theta)$, et la surface latérale de l'alvéole ou des six trapèzes, aura pour expression, $3(2h - \frac{1}{2}\operatorname{tang}\theta)$.

De plus, le côté du triangle équilatéral inscrit, est

$AC = 2\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$, et $Sb = 2\,SO = \frac{1}{\cos\theta}$ ; par conséquent l'aire du losange . . . . . $AbCS = AC \times SO = \frac{1}{2\cos\theta}\sqrt{3}$ ; donc, les trois losanges $= \frac{3}{2\cos\theta}\sqrt{3}$ ; donc enfin la surface totale de l'alvéole, sans y comprendre toutefois la base, a pour expression

$$u = 3\,(2h - \tfrac{1}{2}\,\text{tang}\,\theta) + \frac{3}{2\cos\theta}\sqrt{3}.$$

Cette surface devant être un *minimum*, on a

$$\frac{du}{d\theta} = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = 0\,;$$

et de là on tire

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1}{3}}, \qquad \text{ou} \quad \sin^2\theta = \frac{1}{3}\,:$$

mais, $\log\frac{1}{3} = 9{,}5228787$ ; partant

$$\log.\ \sin^2\theta = 19{,}5228787, \quad \text{et} \quad \log.\ \sin\theta = 9{,}7614393\,;$$

ainsi l'angle $\theta = 39^{gr}, 18', 26'', 5$.

En général, $SO = \frac{1}{2\cos\theta}$ ; donc, dans le cas du *minimum*, $SO = \sqrt{\frac{3}{8}}$, par suite . . . . . .

$Cb = \sqrt{\overline{CO} + \overline{Ob}^2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$; et comme le triangle $COb$ donne tang $OCb = \frac{Ob}{OC} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, on doit conclure que l'angle $SCb = 2\,OCb = 78^{gr},36',53''$; enfin, que l'angle $SCA =$ l'angle $SOP$.

Ces résultats s'accordent avec les mesures prises sur une multitude d'alvéoles; ainsi, les abeilles, par l'effet d'un instinct admirable, que les géomètres seuls pouvaient remarquer, économisent leur miel de la manière la plus avantageuse.

179. Voici les énoncés de plusieurs autres problèmes qui sont encore de nature à exercer utilement les élèves.

1°. *Assigner la position des piés de l'homme, de manière que le trapèze de sustentation soit le plus grand possible.*

2°. *Parmi toutes les ellipses que l'on peut faire passer par les sommets des quatre angles d'un trapèze, déterminer celle qui a la plus grande ou la plus petite surface, et celle qui approche le plus d'être un cercle.*

3°. *Déterminer les dimensions du plus grand cylindre qu'il soit possible d'inscrire dans un cône donné.*

4°. *Entre tous les cônes droits qui ont le même volume, découvrir celui dont l'enveloppe est un* minimum.

5°. *De tous les cylindres que l'on peut inscrire dans une même sphère, trouver celui dont la surface courbe est un* maximum, *ou dont le volume est le plus grand possible.*

Quoique le calcul différentiel serve ordinairement pour résoudre les questions de *maximis* et *minimis*; il est un grand nombre de circonstances où la méthode des variations

est la seule qui puisse, à cet égard, conduire directement au but. Nous pourrions rapporter ici quelques exemples à l'appui de cette assertion, mais ce serait sortir des bornes que nous nous sommes prescrites ; et d'ailleurs il est tems de terminer cette collection de Propositions de géométrie, parce qu'il est suffisamment prouvé aux jeunes mathématiciens que les méthodes générales, lorsqu'elles sont présentées de la manière la plus simple, sont presque toujours les plus faciles.

FIN.

607693

# *ERRATA.*

Page xvij, lig. 3 : Relation, *lisez* Relations.

23 16 : $= h($, *lisez* $= k($.

29 5 et 6, en remont. : *mettez b* au lieu de *c*, et réciproq.

36 13 : $h =$, *lisez* $h' =$.

53 1 en rem. : aire, *lisez* log. aire

65 4 : $(c, d\}$, *lisez* $(c, d)\}$.

82 8 : $(x - a)$, *lisez* $(x - \alpha)$.

87 12 : $+ n$, *lisez* $+ n'$.

88 7 et 17 : coordonnées, *lisez* ordonnées.

96 3, en remont. : $m'$, *lisez* $m''$.

102 5 : $s''$, *lisez* $s'''$.

108 3 : *AMN lisez AM'N.*

114 6, en rem. : $\bullet$, *lisez* $\alpha$.

115 6, en rem. : $\frac{r' \quad r}{\delta}$, *lisez* $\frac{r' - r}{\delta}$.

116 11 et 18 : *CAB, lisez CAB'.*

125 2 : $\frac{y'}{x}$, *lisez* $\frac{y'}{x'}$.

130 10 : $= N \times$, *lisez* $NN' \times$.

143 6 : toutes courbes, *lisez* toutes les courbes.

165 7, en rem. : *menant une droite*, lisez *menant de ce point une droite.*

198 4 : *données*, lisez *donnés.*

209 6, en rem. : $Y''$, *lisez* $X''$.

210 2 : $- 2\, YY'$, *lisez* $+ 2\, YY'$.

212 5 : si deux, *lisez* si les deux.

*ib.* 12 : aux dénomin. 2, *lisez* 4.

*ib.* lig. dernière : $P$, *lisez* $P'$.

217 2, en rem. : $- \delta x\alpha'$, *lisez* $+ \delta x\alpha'$.

220 10, en rem. : subsisent, *lisez* subsistent.

228 2, en rem. : équation, *lisez* équations.

*ib.* 8 : $- (y - y')^2$, *lisez* $+ (y - y')^2$.

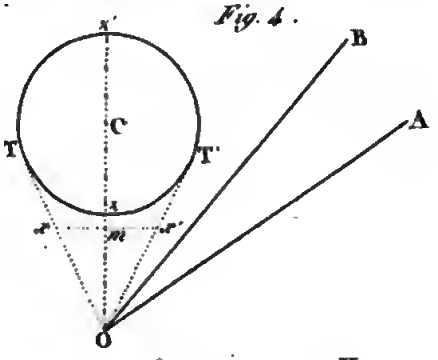
229 6 : $z =$, *lisez* $x =$.

230 13 : *angles*, lisez *axes.*

*

Pag. 23, lig. 26 : coordonnés, *lisez* coordonnées.
248 9 : nombres, *lisez* membres.
251 12 : $y =$, *lisez* $\nu =$.
252 2, au second dénom : $R^2$, *lisez* $R^3$.
255 9 : n°. 115, *lisez* n°s. 115 et 116.
256 1, en remont. : $PM$, *lisez* $PM'$,
258 4 : l'usage de, *lisez* l'usage des.
271 6, *après* discussion, *effacez la virgule.*
285 9, en rem.: manière différente, *lisez* manière d'opérer différente.
287 6, en rem. $\Big\} = 0$, *lisez* $\Big\} = -K$.
296 9, en rem. triangulaires, *lisez* rectangulaires.
299 2, en rem. $\Big\} = 0$, *lisez* $\Big\}^2 = 0$.
306 1 : $(r-1)$, *lisez* $(n-1)$.
307 3 : $2\,\frac{}{a}$, *lisez* $2\,a$.
309 2, au dénomin. : $a$, *lisez* $a$.
314 3, au dénom. : $-ax$, *lisez* $-a'x$.
*ib.* 5 : tang $V$, *lisez* tang $^2V$.
325 1, en rem. : tangente prise, *lisez* tangente t prise.
327 7, en rem. : byperbole, *lisez* hyperbole.
329 4 : Théorème, *lisez* Problème.
337 15, dans les deux équat. : $z + c$, *lisez* $z - c$.
353 3 : ci-dessus, *lisez* précédemment.
357 13 : $f = \frac{1}{2}[\ldots..]$, *lisez* $f = \frac{1}{2}[\ldots..]^{\frac{1}{2}}$
363 6 : *trois lignes*, lisez *quatre lignes.*
371 4, en rem. : et changé, *lisez* et avoir changé.
410 13, au dénom. : $9F$, *lisez* $9R$.
432 3, en rem. : $x$, *lisez* $x'$.
437 5, en rem. : lume, *lisez* volume.

*Fig. 4.*



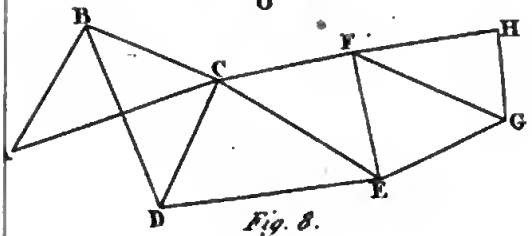
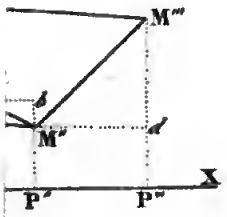




*Fig. 8.*



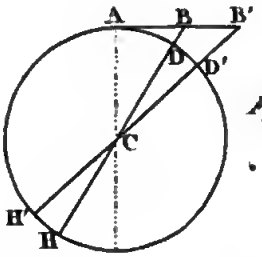
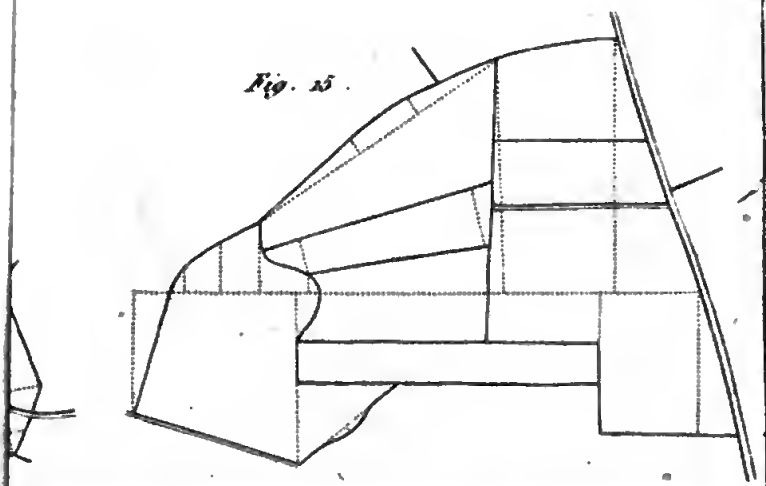



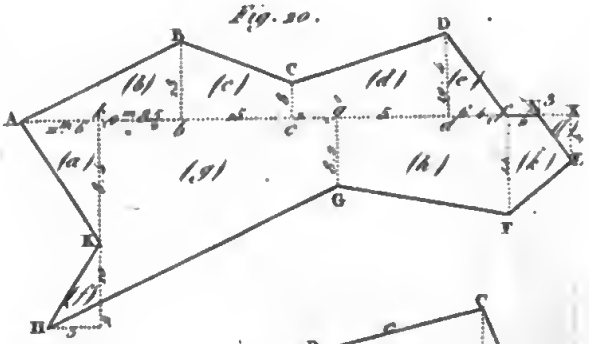

*Fig. 11.*

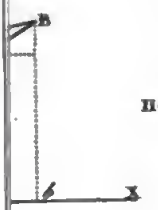
*Fig. 15.*



19.

Fig. 20.



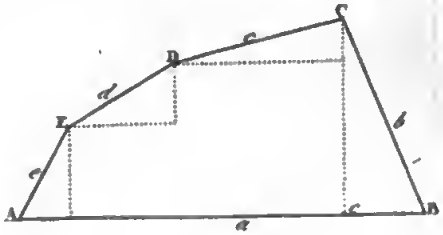




Fig. 26.

g. 28.

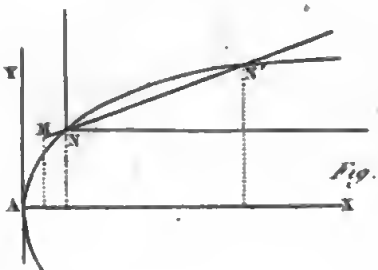



Fig. 29.

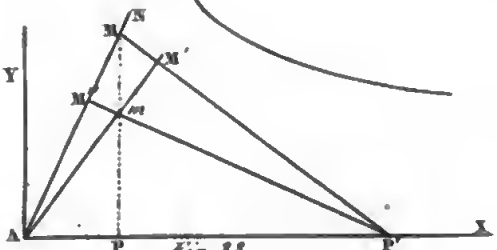



Fig. 33.

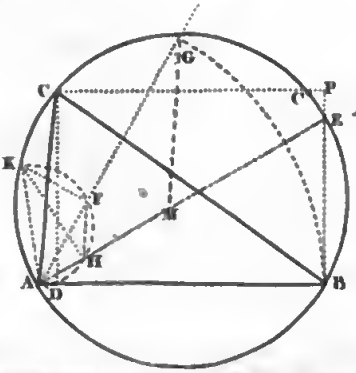



Fig. 37.

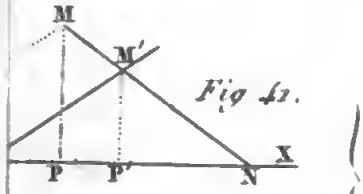



Fig. 41.

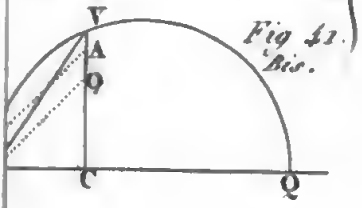



Fig. 41. Bis.

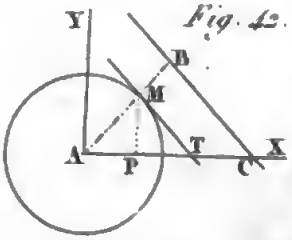



Fig. 42.

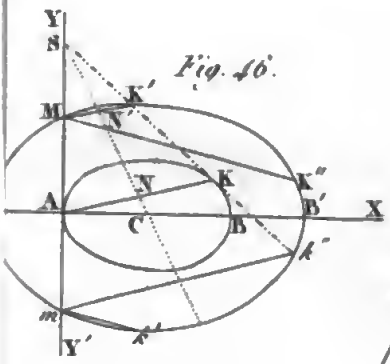



Fig. 46.

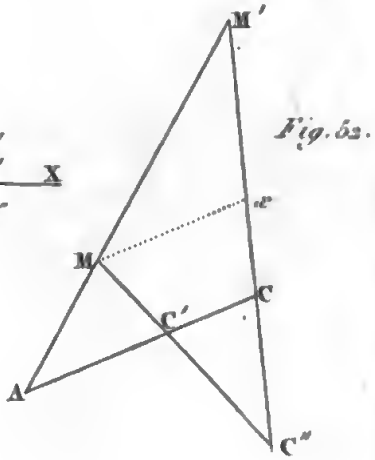



Fig. 62.

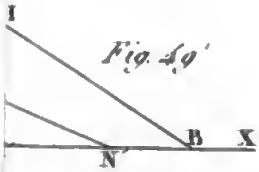



Fig. 49.

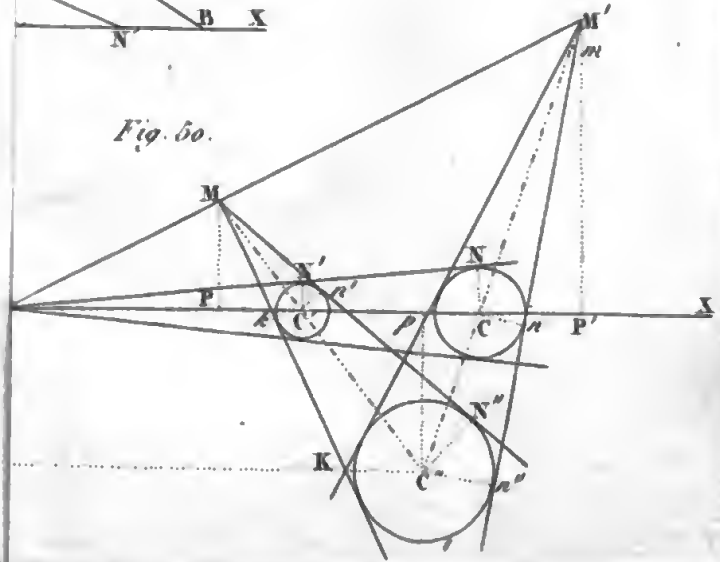



Fig. 60.

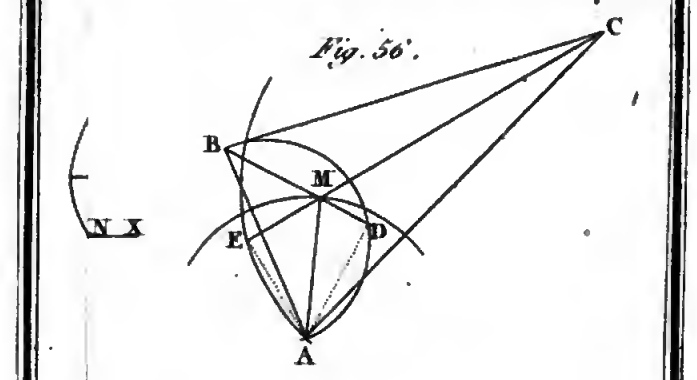
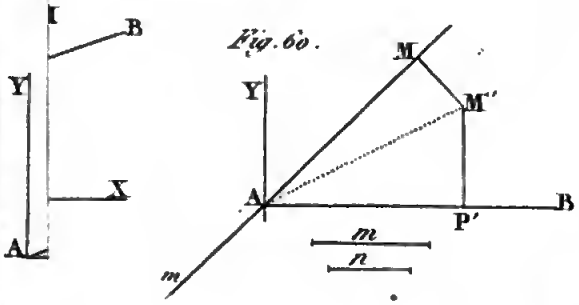
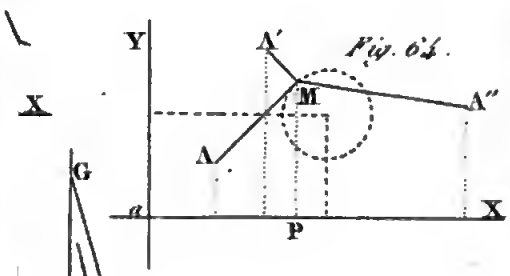


Fig. 56.
C
B
M
N
X
E
D
A


I
B
Y
X
A
Fig. 60.
M
Y
M'
A
B
P'
m
n
m


Y
A'
Fig. 64.
X
M
A''
A
G
a
X
P

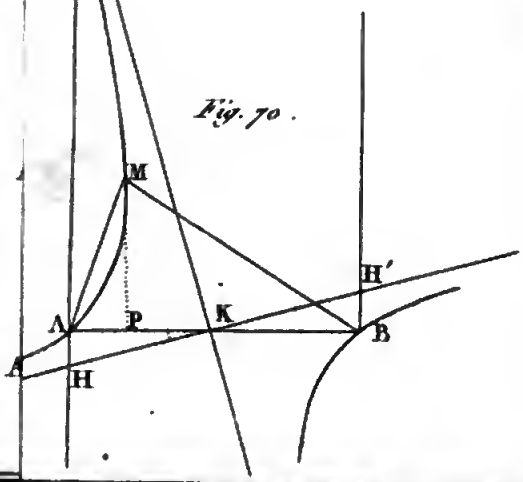


Fig. 70.
M
H'
A
P
K
B
H

Parein

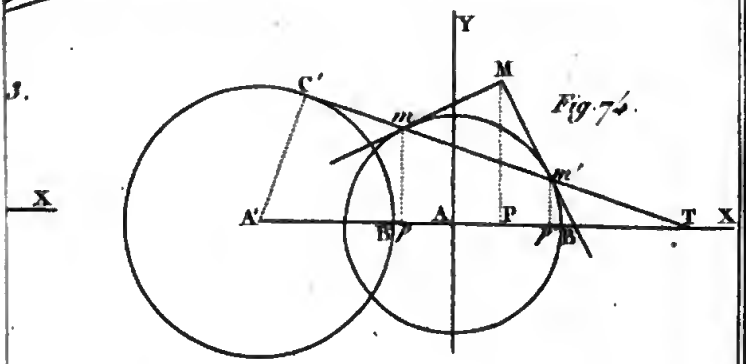
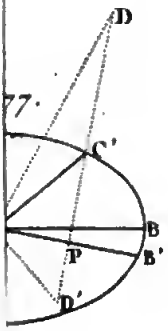



Fig. 74.



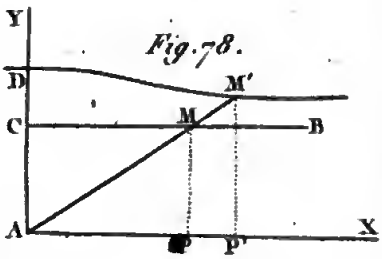




Fig. 78.

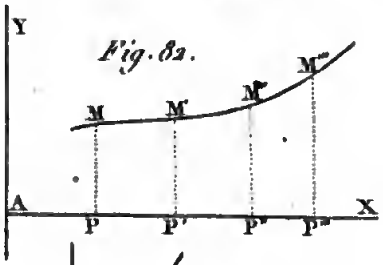



Fig. 82.

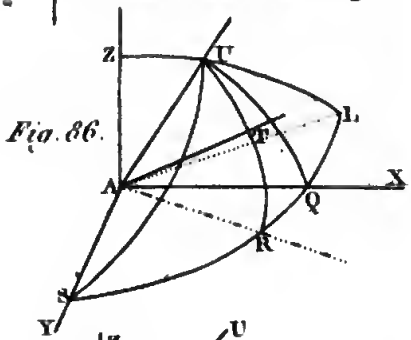



Fig. 86.

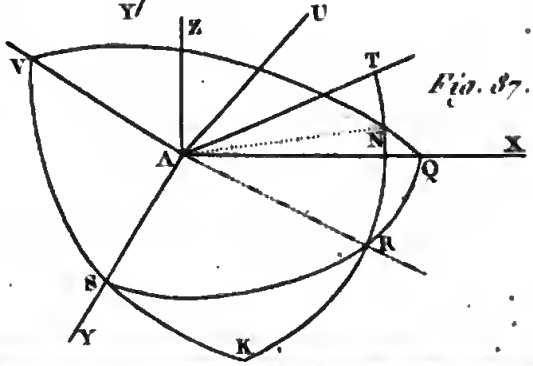



Fig. 87.

Gravé par Dareau, Rue Mignon N°7.

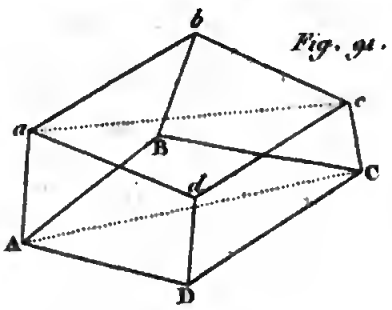



Fig. 94.

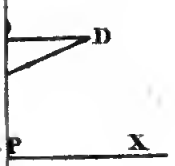
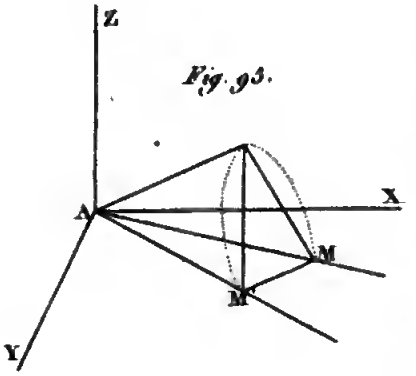



Fig. 93.



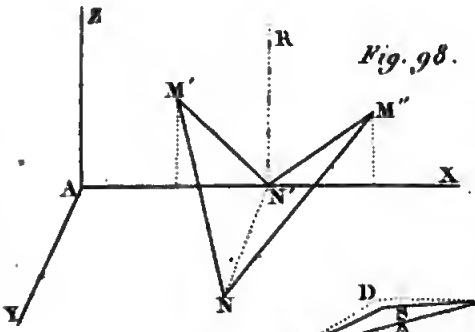




Fig. 98.

Fig. 101.

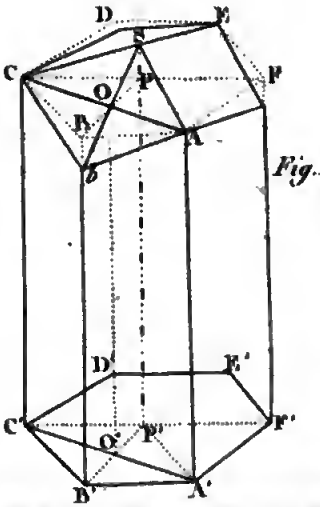
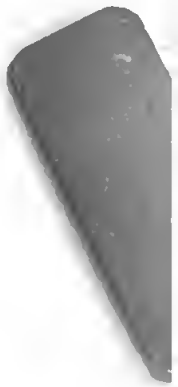



Fig. 102.

Gravé par Darvins Rue Mignon N°7.

Digitized by Google



Digitized by Google